

走行車両や歩行者で励起された橋梁振動の
状態推定とアクティブ制御に関する理論的研究

1997年12月

長崎大学大学院
海洋生産科学研究科

加 賀 敏 明

目 次

第1章 序論	1
1. 1 研究目的	2
1. 2 橋梁振動制御における既往の研究	6
1. 3 本論文の構成	10
参考文献	14
第2章 橋梁の解析モデル	19
2. 1 はじめに	20
2. 2 プレートガーダー橋の梁によるモデル化	21
2. 3 プレートガーダー橋の有限帯板法によるモデル化	23
2. 4 トラスドランガー橋のモデル化	32
2. 5 吊床版歩道橋のモデル化	38
2. 6 まとめ	44
参考文献	46
第3章 各種制御理論の定式化	48
3. 1 はじめに	49
3. 2 橋梁系の状態空間表示	51
3. 3 最適レギュレータ理論	57
3. 4 瞬時最適化理論	59
3. 5 スライディングモード理論	65
3. 6 まとめ	66
参考文献	68
第4章 状態推定理論と確率的制御理論の定式化	71
4. 1 はじめに	72
4. 2 走行車両による道路橋振動へのカルマンフィルタの適用	73
4. 3 確率的制御理論	83
4. 4 歩道橋振動へのオブザーバー理論の適用	88
4. 5 まとめ	90
参考文献	92

第5章 状態推定理論による数値解析	94
5. 1 はじめに	95
5. 2 梁モデルのカルマンフィルタによる状態推定	95
5. 3 有限帯板モデルのカルマンフィルタによる状態推定	105
5. 4 吊床版歩道橋のオブザーバーによる状態推定	115
5. 5 まとめ	120
参考文献	122
第6章 各種制御則による振動制御の数値解析	123
6. 1 はじめに	124
6. 2 プレートガーダー橋の梁モデルにおける振動制御	124
6. 3 プレートガーダー橋の有限帯板モデルにおける振動制御	144
6. 4 トラスドランガー橋モデルにおける振動制御	160
6. 5 吊床版歩道橋における振動制御	176
6. 6 まとめ	180
参考文献	184
第7章 結論	185
付録 [A] 有限帯板法による剛性マトリックスの誘導	190
付録 [B] MATLABソフトウェアによる道路橋解析プログラム	193
謝辞	206

第1章 序 論

1. 1 研究目的

近年，都市高速道路周辺において交通荷重により発生する環境振動が深刻な問題になっている．その主な要因は，次のように考えられる．①車両が橋梁上を走行する場合，路面凹凸や継手部段差等の路面不整により，車両振動が励起される．②車両の接地力が外乱として橋桁に加わるために，橋桁が加振される．③この振動が，橋脚から地盤を通じて沿道一帯に伝搬し，建築物等の共振現象を引き起こす．④この結果，沿道住民が睡眠妨害や不快感等をおぼえる．このような交通荷重による振動障害の対策の一つとして，橋梁の桁振動を直接制御する振動制御の技術に関する開発や研究^{1) 2) 3)}が進められてきた．

走行車両による道路橋交通振動の振動制御は，制御問題における独自の課題を持っている．第1は，橋梁 - 車両系が時変係数系⁴⁾を構成することである．建築構造物に地震が作用する場合のような通常の振動問題では，固定された構造物の1点のみに外力が働く．この場合，構造物の固有振動数は常に一定の値を保ち，定常係数系を構成する．一方，道路橋交通振動では，走行車両の振動と橋梁振動の相互作用が起こる．すなわち，車両による荷重の作用する位置により，橋梁の固有振動数が見かけ上変化する．例えば，橋梁の1次の振動モードに注目した場合，車両が橋梁の中央に近い地点に位置するほど，車両による有効質量が大きくなり，橋梁の1次の固有振動数は低下する．車両の移動により橋梁の振動性状が，時間と共に変化するようになる．この結果，橋梁 - 車両系は時変系を構成し非定常性の問題になる．道路橋交通振動の制御において，建築構造物の振動制御のように橋梁 - 車両系を定常係数系としてとらえ，車両による荷重が橋梁の midpoint のみに作用するものと仮定し，橋梁の固有

振動数が一定なものと考え定常な振動制御則を構成する場合，車両がこの地点からはずれた時刻においては最適な制御は望めない．橋梁の固有振動数の変動に対応した，時変系のための制御を行う必要がある．

次に，走行車両による道路橋振動の振動制御における第2の課題は，橋梁に作用する交通荷重の不確定性の問題である．これは，走行台数，走行速度や車間距離等の走行状態や車種の違いによる車両振動特性のばらつきに起因するものである．交通荷重の不確定性に対しロバスト（頑強）な制御が望まれている．

本研究は，道路橋交通振動の振動制御において，理想的な状態を想定し，単一車両が一定速度で走行する場合の道路橋振動を考え，まず初めに解決しなければならない問題である時変系に対する振動制御の可能性について理論的な検討を行うものである．

振動制御の技術には，構造物の減衰を高めるもの⁵⁾，動吸振器など付加装置を設置するパッシブな振動制御^{6) 7)}，積極的に振動を抑制する力を発生して振動を制御するアクティブ振動制御^{8) 9)}さらに，アクティブ振動制御にパッシブな振動制御の効果を持たせたハイブリッド振動制御^{10) 11)}がある．

走行車両による道路橋振動に動吸振器を用いたパッシブ制御が実験的に検討²⁾されたが，十分な制御効果が得られなかった．この主な原因は，車両が走行することにより生ずる，橋梁における見かけ上の固有振動数の変動に対して，動吸振器の調整ができなかったためであると考えられる．この対策として，複数個の動吸振器を用いる方法が検討されてきた．これは，ある何点かの時刻における橋梁の振動状態に着目し，それらの時刻における橋梁の固有振動数に対応した動吸振器を必要な数だけ設置する方法である．特定の時刻における橋梁の固有振動数に対応可能な制御が実現できる．一方，ア

クティブ制御を用いた場合，設計者自らが，システムの動特性を自由に決定できるため，時変系に対し全時刻で連続的に制御を行う可能性を持っている．橋梁の固有振動数の変動に即した制御則を用いることができれば，橋梁上の1点の加振により，時変系に追従する制御が実現できる．走行車両による道路橋振動の制御においては，動吸振器を用いるパッシブ制御に比べ，アクティブ制御により時変系制御を行うことが有利となる．そこで，本研究における第1の研究目的を道路橋交通振動の時変系問題を解決するアクティブ振動制御則の確立とする．

道路橋交通振動のアクティブ制御における時変系の問題が解決されたとして，次に問題となるのは，橋梁の振動の情報から車両の振動状態や橋梁の複数モードの振動を推定する状態推定問題である．

橋梁の振動制御をアクティブ制御で行う場合，一般に，状態フィードバックが適用される．状態フィードバックとは，制御対象の状態量をすべて求め，その状態量から制御入力を算出し，振動を抑制する制御方法である．道路橋交通振動による，状態フィードバック制御を実現するためには，橋梁に設置した検出器の信号から直接測定できない車両の状態量を推定する必要がある．さらに，橋梁上の1点の観測点の情報から複数モードの振動を推定する必要がある．そこで，本研究における第2番目の目的を，橋梁上の1点の観測点の情報から，車両を含む全状態量を推定する状態推定機構の構成とする．

さらに，時変系と状態推定の問題を同時に解決するために，推定機構を時変系のための制御理論に組み込んだ制御則を考える．この構成を本研究における第3番目の目的とする．

本研究の目的をまとめると次のようになる，

①時変系に対する制御則の確立，

② 橋梁上の1点の観測値から車両を含む全状態量を推定する推定機構の構成，

③ 状態推定と時変系に対応する制御則の確立，

である．

これらの目的に基づいた本研究における主要な課題は次のように要約することができる．

(1) 道路橋交通振動問題への推定理論と制御理論の適用と拡張

時変系の制御に対応するために，最適レギュレータ理論¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾，瞬時最適化理論¹⁵⁾¹⁶⁾およびスライディングモード理論¹⁷⁾を適用する．また，瞬時最適化理論を拡張した多段階制御理論を提案し，より時変系の特性が強いシステムに対応させる．次に，推定問題に対して，カルマンフィルタ¹⁸⁾¹⁹⁾²⁰⁾を適用する．さらに，カルマンフィルタを最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論に組み込み，確率的制御理論（LQG制御）¹⁹⁾²⁰⁾²¹⁾²²⁾の定式化を行う．

(2) 各種道路橋のモデル化と振動制御の有効性の確証

走行車両による道路橋振動制御に対し，本研究が提案する制御則の有効性を検証するために数値シミュレーションを実施する．まずは，カルマンフィルタを橋梁・動吸振器・車両系に適用した場合の状態推定の精度を確かめる．橋梁モデルは，高速道路に多く用いられるプレートガーダー橋の梁モデルと有限帯板モデル²³⁾とする．

次に，各制御則を橋梁・車両系のアクティブ制御とハイブリッド制御に適用した場合の振動制御における有効性を検討する．橋梁モデルは，プレートガーダー橋の梁モデルと有限帯板モデルおよび，形態が単純で重量が軽いためにしばしば振動制御の対象となってきたトラストランガー橋の2次元の有限要素法²⁴⁾によるモデルとする．

(3) 歩道橋振動へのアクティブ制御の適用

本研究では道路橋振動と共に，歩行者による歩道橋振動の状態推定と振動制御についても検討する．対象とする歩道橋は，フレキシブルな構造のため特に振動しやすい吊床版歩道橋とする．これを3次元の有限要素法によりモデル化する．歩行者による吊床版歩道橋の振動は，荷重の特徴を考えると，走行車両による道路橋振動に比べ，時変系や外力の不確定性の傾向が小さい．このため設計が単純な制御則と推定理論を用いる．制御則には最適レギュレータ理論を適用する．推定理論にはオブザーバー²⁵⁾を採用する．さらに，オブザーバーと最適レギュレータ理論を組み合わせた制御則を構成する．歩行者による吊床版歩道橋振動の状態推定および振動制御の有効性について数値シミュレーションにより検証する．

1. 2 橋梁振動制御における既往の研究

1. 2. 1 パッシブ制御に関する研究

動吸振器を用いる振動制御は，その構造が単純であるため，古くから J.P.Den Hartog²⁶⁾ や S.P.Timoshenko²⁷⁾ らにより機械振動に対する研究として行われてきた．ここで用いられた動吸振器の設計法は，構造物・動吸振器系における構造物の周波数伝達関数の最大値を最小化するように動吸振器のパラメータ（固有振動数および減衰定数）を決定するものであった．その結果，これらの動吸振器のパラメータは，対象構造物の固有振動数と対象構造物に対する動吸振器の質量比により一義的に決定されるものであった．この時代の設計法は1自由度系構造物を制御対象としたものであり，現代では古典的方法と呼ばれている設計手法である．

現実の構造物は多自由度系となるものが多い．背戸ら^{28) 29)} は多

質点系モデルや鉄鋼材料で作られた機械構造物に対する動吸振器の設計法についての研究を行った。この研究は、対象構造物の各次振動モードを抑制するために複数個の動吸振器を用いた場合の、動吸振器の最適な取り付け位置と、その位置での各次振動モードに対する等価質量を決定するものであった。

一方、土木・建築系構造物に対する研究としては、高橋ら³⁰⁾が橋梁や高層建築物を梁で近似的にモデル化し、このモデルに対する動吸振器の設計法を理論的に検討している。高次振動に対しては、複数個の動吸振器を設置することにより対応している。

橋梁を含む土木構造物には不確定な外力が作用する場合が多い。G.B.Warburton^{31) 32)}は、構造物・動吸振器系に白色雑音を作用させた場合における構造物の分散応答を最小化する動吸振器の最適設計法を確立した。この方法を発展させた形で、岡林ら^{33) 34)}は、走行車両が橋梁上を走行した場合について、多自由度系でモデル化されたプレートガーダー橋やトラスドラングー橋に対し、着目点の分散応答を最小にする H_2 ノルム法と呼ばれる動吸振器の最適設計法と、これを最適配置する方法を提案している。

以上に示した研究例の多くは数値解析による理論的な検討である。理論的な研究に比べ、実際の構造物に対する実用例はまだそれほど多いとは言えない。しかし、実橋または模型による実験的研究として、梶川ら^{2) 35)}による道路橋の実橋実験や横山ら³⁶⁾による模型実験が報告されており、動吸振器による橋梁振動軽減の可能性が明らかにされている。また、松本ら^{37) 38)}により歩道橋における現地実験が行われている。

本研究では、走行車両による道路橋振動のハイブリッド制御において用いる動吸振器の設計法に、理論上これに最も適したものと考えられる H_2 ノルム法と H_{\max} 法を採用する。道路橋振動に対する動吸振

器の H_2 ノルム法は，岡林らにより提案されたものである． H_{\max} 法は，古典的設計法を発展させた設計手法であり，数値計算により，橋梁 - 動吸振器 - 車両系における橋梁の周波数伝達関数の最大値を最小化するように動吸振器のパラメータを決定する方法である．

1. 2. 2 アクティブ制御に関する研究

機械系技術者による現代制御理論の誕生と電気系技術者によるコンピュータの飛躍的な発達により，現代においてアクティブ振動制御は実現可能な制御方法として認められ始めた．アクティブ振動制御は，機械や電気分野だけでなく，航空工学，船舶工学，音響工学さらには土木・建築工学^{39) 40) 41) 42) 43) 44)} の分野でも注目されることになった．

走行車両による道路橋振動のアクティブ制御を実現するための研究テーマとしては，主に次の二つのものが考えられる．すなわち，

(1) 制御を行うための装置の開発，

(2) 制御力を算出するための制御則の確立，

である．(1) は主に信号処理に関する研究と制御力を発生させる制御機構に関する研究がある．前者について，丸山ら⁴⁵⁾ がFFT演算によるデジタル信号処理に関する研究を行っている．後者については，矢作ら⁸⁾ や藤野ら⁴⁶⁾ によるアクティブ・テンドン方式の実橋実験や模型実験の報告がある．また，川谷ら⁴⁷⁾ はアクティブマスダンパーを用いたハイブリッド制御による模型実験を行っている．

一方，道路橋交通振動では，車両による移動荷重が橋梁に作用するため，(2) の制御則を確立しようとするときには，以下のようなことが問題になる．すなわち，

① 橋梁と車両が連成振動を起こす，

② 橋梁 - 車両系はシステムが時間的に変化する時変系の問題になる,

③ 路面凹凸が原因となるため車両による動的荷重が不規則なものになる,

④ 実橋に対する数学モデルの低次元化に伴うスピルオーバー現象を回避しなければならない,

である. 道路橋振動問題の制御則に関する研究は, これまで多くの実績はない.

歩行者による歩道橋振動に対するものとして, 岡林ら⁴⁸⁾による, 吊床版橋振動のアクティブ制御時におけるスピルオーバー対策として, H^∞ 制御理論を適用したものや, 長谷川ら⁴⁹⁾による, 衝撃加振を加えた単純梁振動に対する H^∞ 制御の実験的研究が僅かにある.

本研究では, これまで未解決の問題であった走行車両による道路橋振動制御における時変系の問題を解決するために, これに有効な瞬時最適化理論およびスライディングモード理論をアクティブ制御に適用する. さらに, 時変系に対応させるために, 瞬時最適化理論を拡張した多段階制御理論を提案する.

1. 2. 3 状態推定に関する研究

状態推定に関する研究の歴史は, 1960年にR.E.Kalman⁵⁰⁾より発表されたカルマンフィルタおよび1964年にD.G.Luenberger⁵¹⁾より発表されたオブザーバー理論に始まる. 状態推定は状態フィードバックを基礎とする振動制御にとって重要な課題であるため, 制御系技術者の注目を集めた. カルマンフィルタとオブザーバーの使用上の主な相違点は, 前者が統計的な信号処理¹⁴⁾をするのに対し, 後者は確定的な方法をとることにある. R.E.Kalmanは, 最初に離散時間⁵²⁾におけ

るカルマンフィルタの理論を発表し、その後それを連続時間¹⁸⁾に拡張した。

状態推定の研究に関連したものとして、土木・建築系では、丸山、星谷ら^{53) 54)}が、非線形の状態方程式に対応する拡張カルマンフィルタを使用することで、移動荷重が作用する単純梁の構造同定や構造物の地震時挙動特性の同定に関する研究を行っている。また、佐藤ら⁵⁵⁾は、忘却定数を導入し、過去の観測値の記憶を減退させることで、構造物の動特性の変動に追従しながら構造同定を行うことが可能な適応カルマンフィルタを提案している。道路橋振動のアクティブ制御においては、橋梁振動の観測値から車両の状態や橋梁の各次振動の状態を推定する必要がある。カルマンフィルタによる道路橋振動の状態推定は重要な課題である。

本研究では、走行車両による道路橋振動にカルマンフィルタを適用し、現実には計測不可能な車両の状態量を含むシステムの全状態量を推定する。さらに、カルマンフィルタによる状態推定理論を制御則に組み込んだ確率的制御理論（LQG制御）を構成する。

1. 3 本論文の構成

本論文は、走行車両や歩行者により励起された橋梁振動のアクティブ制御を実現する際に問題となる時変系と状態推定を解決する制御則を確立するための理論的な検討を行うものである。数値シミュレーションにより、本論文が提案する橋梁振動のための制御則の有効性を検証する。

本論文は、7つの章と付録から構成されている。以下にこれらの概要を示す。

第1章では、橋梁振動対策の重要性とその対処方法について述べ、

本研究の目的を明確にする．また，既往の研究で提案されてきた橋梁振動制御技術の歴史を整理し，本研究の立場を説明する．

第2章では，制御対象とする橋梁のモデル化を行う．まず，高速道路に多く採用されているプレートガーダー橋を梁および有限帯板法でモデル化する．次に，形態の単純さや重量の軽さのために，これまでしばしば振動対策の必要性が指摘されてきたトラスランガー橋を2次元の有限要素法でモデル化する．さらに，歩道橋モデルとして，フレキシブルな構造のため振動しやすい吊床版歩道橋を3次元の有限要素法によりモデル化する．道路橋交通振動の外力は，路面凹凸により励起された走行車両であり，吊床版歩道橋の外力は，歩行者の荷重による加振力である．

第3章では，時変系のために採用した各種の制御理論の定式化を行う．そのためにまずは，走行車両や歩行者による荷重が作用した場合の各橋梁モデルの方程式を，状態フィードバック制御の基礎となる状態空間による方法で表現する．ここで得られた状態方程式に基づき，一般的な振動制御理論である最適レギュレータ理論の定式化を行う．フィードバックゲインベクトルの決定に用いられるリカッチ方程式の時間的変動により，現実的な計算方法である定常最適レギュレータ理論と，より厳密な非定常最適レギュレータ理論を誘導する．次に，時変系制御則である瞬時最適化理論の定式化を行う．さらに，本研究ではこれを拡張した多段階制御理論を提案し，より時変系の特性を持たせた制御則を構成する．最後に，ロバスト制御理論であるスライディングモード理論を時変系の問題に適用した場合の定式化を行う．

第4章では，状態推定理論および確率的制御理論の定式化を行う．状態推定理論は，カルマンフィルタとオブザーバー理論を考える．橋梁-動吸振器-車両-路面系を確率微分方程式で表現し，この確率

微分方程式に基づき定常および非定常な連続系のカルマンフィルタを定式化する．さらに，実際の制御に適した離散系の非定常カルマンフィルタを誘導する．最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論に対して，カルマンフィルタを制御則に組み込んだ確率的制御理論を構成する．また，歩行者による吊床版歩道橋振動に適用するため，設計の単純な全次元オブザーバーを考え，全次元オブザーバーを最適レギュレータ理論に組み込んだ制御則を構成する．

第5章では，橋梁振動に対するカルマンフィルタおよびオブザーバーによる状態推定の精度を数値シミュレーションにより検討する．まず，プレートガーダー橋の梁モデルおよび有限帯板モデルにおける橋梁 - 動吸振器 - 車両系を考え，橋梁上の1点における観測値から，橋梁の3次振動まで，動吸振器，車両および路面凹凸の状態量をカルマンフィルタにより推定する．それぞれ，定常および非定常のカルマンフィルタを適用した場合について検討する．次に，オブザーバーにより吊床版歩道橋の状態推定について，橋梁上の1点の観測値から，振動制御の対象とする曲げに関する10次振動までを推定する．道路橋交通振動および歩行者励起による歩道橋振動において，橋梁上の1点の観測値から全状態量の推定が可能であることを明らかにする．

第6章では，本研究が提案する制御則によるアクティブ制御やハイブリッド制御を各橋梁モデルに適用した場合の振動制御の有効性について数値シミュレーションにより検討する．道路橋モデルでは，走行車両による時変系の特性に対応するため，瞬時最適化理論やスライディングモード理論による制御則を適用しその振動制御効果について詳細な比較検討を行う．プレートガーダー橋の有限帯板モデルおよびトラスドランガー橋モデルについては，確率的制御理論および多段階制御理論による制御効果の検討も行う．吊床版歩道橋は，

時変系の傾向が少ないので，アクティブ制御に対し，最適レギュレータ理論とオブザーバー理論を適用した場合の制御について考える．

第 7 章では，本論文を総括して得られた結果をまとめる．

参考文献

- 1) 梶川康男・大嶋信太郎：周辺環境への影響を考慮した高架橋の防振効果に関する一解析法,土木学会論文集, No.341, pp.79-88, 1984.4.
- 2) 梶川康男・沖野真・宇藤滋・松浦康夫・伊関治郎：動吸振器による高架橋の振動軽減対策,構造工学論文集, Vol.35A, pp.585-595, 1989.3.
- 3) 山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答 - 衝撃係数 - に関する考察,土木学会論文集, No.148, pp.40-50, 1967.12.
- 4) 山口宏樹・増田高志・伊藤亜木：橋桁・車両連成振動系の動特性とそのロバスト制御に関する基礎研究,第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集,日本機械学会, No.95-28, pp.271-274, 1995.7.
- 5) 藤野陽三・比江島慎二：桁端ダンパーによる橋梁の交通振動の軽減,土木学会論文集, No.465/ I -23, pp.107-116, 1993.4.
- 6) 梶川康男・沖野真・吉川実・木久本正信：高架橋と周辺地盤の交通振動予測と制振効果,構造工学論文集, Vol.35A, pp.747-748, 1989.3.
- 7) 岡林隆敏・竹下渡：走行車両による道路橋振動制御のための動吸振器の最適設計,土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B, pp.97-104, 1991.7.
- 8) 矢作枢・吉田和彦：高架橋における交通振動のアクティブコントロール,土木学会論文集, No.356/ I -3, pp.435-444, 1985.4.
- 9) W.F.Chen: Active Structural Control-Theory & Practice-, Bath Press, Inc., 1990.
- 10) 藤野陽三・ビノド K .バルティア・笠原覚：高架橋の交通振動に対するアクティブ制御,構造工学論文集, Vol.41A, pp.677-681, 1995.3.
- 11) 川谷充郎・山田靖則・下野正人・清木計成・森淳彦：桁橋の交通振動に対するハイブリッド制御の模型実験,構造工学論文集, Vol.41A, pp.683-690, 1995.3.
- 12) D.G.Schultz and J.L.Melsa (久村富持訳)：状態変数と線形制御系,学献

- 社,1971.5.
- 1 3) 小郷寛・美多勉：システム制御理論入門，実教出版,1979.12.
 - 1 4) 白石昌武：入門現代制御理論，啓学出版,1987.11.
 - 1 5) 小堀鐸二：制震構造－理論と実際－，鹿島出版会,1993.9.
 - 1 6) J.N.Yang, A.Akbarpour and P.Ghaemmaghami:New Optimal Control Algorithms for Structural Control,ASCE, Vol.113,No.9,pp.1369-1386,1987.9.
 - 1 7) 野波建蔵・田宏奇：スライディングモード制御，コロナ社,1994.10.
 - 1 8) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書,1977.1.
 - 1 9) 榎本義一・添田喬・中溝高好：確率システム制御の基礎，日新出版,1975.5.
 - 2 0) 砂原善文：確率システム理論，電子通信学会,1979.3.
 - 2 1) P.Dorato,C.Abdallh and V.Ceronep:Linear-Quadratic Control,Prentice-Hall,Inc.,1995.
 - 2 2) G.Chen,G.Chen and S.H.Hsu:Linear Stochastic Control Systems,CRC Press,Inc.,1995.
 - 2 3) 草間晴幸・谷山健：有限帯板法，日刊工業新聞社,1994.4.
 - 2 4) 小堀為雄・吉田博：有限要素法による構造解析プログラム，丸善,1980.12.
 - 2 5) 岩井善太・井上昭・川路茂保：オブザーバー，コロナ社,1988.10.
 - 2 6) J.P.Den Hartog:Mechanical Vibrations,4th ed.,McGraw-Hill, Inc.,1956.
 - 2 7) S.チモシェンコ（谷下市松・渡辺茂訳）：工業振動学，東京図書,1963.
 - 2 8) 背戸一登・岩浪孝一・滝田好宏：動吸振器による多自由度系の制振（第1報，動吸振器の設計理論），日本機械学会論文集（C編），50巻，458号,pp.1962-1969,1974.10.
 - 2 9) 背戸一登：動吸振器による多自由度系の制振（第2報，伝達マトリックス法による動吸振器の最適設計），日本機械学会論文集（C編），50巻，458号,pp.1970-1977,1974.10.
 - 3 0) 高橋龍夫・倉西茂：動吸振器による可撓性構造物の振動抑制に

- ついて,土木学会論文集, No.308, pp.15-24, 1981.4.
- 3 1) E.O.Ayorinde and G.B.Warburton: Minimizing Vibrations with Absorbers, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol.8, pp.219-236, 1980.
 - 3 2) G.B.Warburton: Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol.10, pp.381-401, 1982.
 - 3 3) 岡林隆敏・竹下渡: 単一車両が走行するプレートガーダー橋の動吸振器の最適設計, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.671-680, 1993.3.
 - 3 4) 岡林隆敏・竹下渡・岩見章博: 交通荷重による補剛アーチ橋の振動制御のための動吸振器の最適設計, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.805-813, 1992.3.
 - 3 5) 讃岐康博・梶川康男・岩津守昭・林秀侃・伊関治郎: 動吸振器の制振効果に関する現地実験, 土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B, pp.89-96, 1991.7.
 - 3 6) 横山功一・澤田憲文・岩津守昭・澤登善誠・右近大道・伊関治郎: 動吸振器による道路橋の交通振動の軽減効果について, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.815-823, 1992.3.
 - 3 7) 松本嘉司・佐藤秀一・西岡隆・塩尻弘雄: 歩行者の特性を考慮した歩道橋の動的設計に関する研究, 土木学会論文集, No.205, pp.63-70, 1972.9.
 - 3 8) 松崎恵一・西岡隆・松本嘉司: 歩道橋に取り付けた吸振器の効果について, 土木学会論文集【ノート】, No.261, pp.129-131, 1977.5.
 - 3 9) 財団法人海洋都市開発研究会編: アクティブ制御 - 最新事例と海洋都市への適用 -, 日刊工業新聞社, 1992.3.
 - 4 0) H.H.E.Leipholz and M.Abdel-Rohman: Control of structures, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
 - 4 1) T.T.Soog: Active Structural Control-Theory and Practice, Longman Scientific & Technical, 1990.
 - 4 2) A.Preumont: Vibration Control of Active Structures-An Introduction, Kluwer Academic Publishers, 1997.

- 43) J.L.Junkins and Y.Kim:Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures,AIAA Education Series,American Institute of Aeronautics and Astronautics,Inc.,1993.
- 44) 日本建築学会関東支部構造部会：シンポジウム制振構造の現状 - 高層建築物の制振 -,1989.12.
- 45) 丸山輝彦・鳥居邦夫・小野秀一・寺田博昌：デジタル制御アクティブコントロール装置の開発,土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.327-334,1991.7.
- 46) 藤野陽三・ベンヌン ワーニッシャイ・パチエコ ベニート・レミ アグレ・タマヌーン. S:斜張橋のアクティブ テンドン・ステイフネス コントロール,土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.319-326,1991.7.
- 47) 川谷充郎・森淳彦：道路橋の振動制御に対する制振装置の開発,土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.197-204,1991.7.
- 48) 岡林隆敏・小松正貴・角本周・下田郁夫：歩行者による吊床版橋振動の H^∞ 制御理論によるアクティブ制御,土木学会論文集, No.577/I -41,pp.153-163,1997.10.
- 49) 長谷川靖・川谷亮治・鳥居邦夫・丸山輝彦： H^∞ 制御理論に基づく橋梁の振動制御に関する研究,第2回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.175-182,1993.8.
- 50) R.E.Kalman:A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem,Jouunal of Basic Engineering,82,pp.35-45,1960.
- 51) D.G.Luenberger:Observing the State of a Linear System,IEEE Trans.Mil.Electron,MIL-8,pp.74-80,1964.
- 52) 中野道雄・西山清：パソコンで解くカルマンフィルタ,丸善, 1993.2.
- 53) 丸山収・斉藤悦郎・星谷勝：移動荷重 - はり系の動特性推定,土木学会論文集, No.368/I -5,pp.283-292,1986.4.

- 54) 星谷勝・丸山収：非線形構造系の地震時挙動特性の同定，土木学会論文集，No.386/I-8,pp.397-405,1987.10.
- 55) 佐藤忠信・竹井賢二：適応カルマンフィルタの構築とその応用，土木学会論文集，No.584/I-42,pp.163-173,1988.1.

第 2 章 橋梁の解析モデル

2. 1 はじめに

本研究ではプレートガーダー橋^{1) 2) 3)}，トラスドランガー橋⁴⁾および吊床版歩道橋^{4) 5) 6) 7)}に対する振動制御の検討を行う．本章では，これらの橋梁に対するモデル化を行う．

プレートガーダー橋は，都市高速道路高架橋に多く採用されている橋梁である．近年，都市高速道路橋周辺環境において走行車両による交通振動障害が問題になっている．プレートガーダー橋は，複数の走行車線が存在し，幅員方向を含む2次元的な拡がりを持つ．さらに，走行状態によっては偏載荷重が働くことになる．本研究では，プレートガーダー橋を，1次元の弾性梁と考える梁理論^{4) 8) 9)}¹⁰⁾によるモデル化を行う．さらに，より現実に近い2次元的な拡がりを考慮し，直交異方性板として有限帯板法^{11) 12)}でモデル化する．このモデルに対し振動解析を行うことで，制御対象となる橋梁の固有振動数の範囲を確認する．橋梁に働く外力としては，単一走行車両を考え，動吸振器を設置した場合について定式化する．

トラスドランガー橋は，アーチ橋の一種でありその景観の優美さと重量が軽いことによる経済性のために，数多く架設されている橋梁である．重量が軽いことによる揺れやすさのために，橋梁振動による使用性の問題をしばしば発生させている．本研究では，トラスドランガー橋に対し有限要素法¹³⁾を適用し，2次元骨組構造によりモデル化する．動吸振器を設置した橋梁上を単一車両が走行する場合に対する方程式を誘導する．

吊床版歩道橋は，経済性と曲線による景観的な優しさから，歩道橋に利用されている．最近では，その支間がより長大化する傾向にある．そのために，風や歩行外力による振動により歩行者が不安感を抱く使用性の問題が指摘されている．この吊床版歩道橋に有限要

素法を適用し，3次元骨組構造によりモデル化する．振動解析を行うことにより，固有振動数と振動モードを求める．歩行者による移動荷重を外力とした場合の吊床版歩道橋の定式化¹⁴⁾を行う．

以上の橋梁モデルの支持条件は，プレートガーダー橋の梁モデルと有限帯板モデルおよび，トラスドランガー橋の有限要素法によるモデルでは単純支持，吊床版歩道橋の有限要素法によるモデルでは支点を固定とする．本研究では，橋梁に作用する外力を走行車両および歩行者による荷重に限定する．

2. 2 プレートガーダー橋の梁によるモデル化

2. 2. 1 橋梁のモデル化

解析の対象とするプレートガーダー橋を梁でモデル化する．図2.1に示すように，動吸振器を設置した路面凹凸を有する橋梁上を，1自由度のばね-質点系でモデル化された単一車両が，一定速度 v で走行する場合を考える．橋梁の境界条件は単純支持とする．

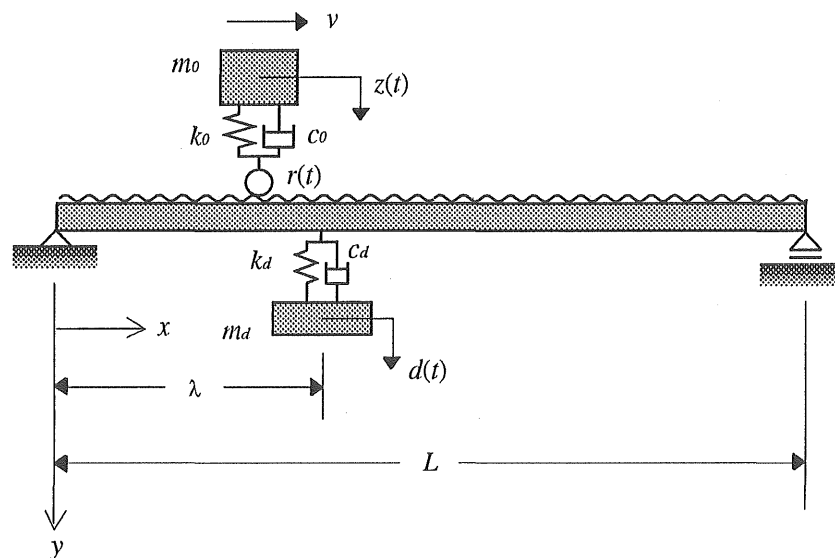


図 2.1 橋梁-動吸振器-車両系モデル

橋梁 x 点における変位応答 $y(x, t)$ は，モード解析により橋梁を r 次振動まで考慮する場合， k 次振動の基準座標 $q_k(t)$ ，振動モード $\phi_k(x)$ を用い，次式のように表すことができる．

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^r \phi_k(x) q_k(t) \quad (2-1)$$

この式における橋梁の k 次振動の基準座標 $q_k(t)$ は次式のように記述できる．

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\mu_{kv} \phi_k(vl) \ddot{z}(t) - \mu_{kd} \phi_k(\lambda) \ddot{d}(t) \quad (k=1, \dots, r) \quad (2-2)$$

ここで， h_k ， ω_k はそれぞれ橋梁の k 次における減衰定数および固有円振動数， $\ddot{z}(t)$ ， $\ddot{d}(t)$ は車両および動吸振器の加速度， μ_{kv} は車両の質量 m_0 と橋梁の k 次の有効質量 m_k との質量比， μ_{kd} は動吸振器の質量 m_d と橋梁の k 次の有効質量 m_k との質量比である．

梁の境界条件を単純支持であるとした場合， k 次の振動モード，有効質量および固有円振動数は，それぞれ次式で与えられる．

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (2-3)$$

$$m_k = \int_0^L \frac{wA}{g} \phi_k(x)^2 dx \quad (2-4)$$

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EIg}{wA}} \quad (2-5)$$

ここで， L は橋梁の支間長， w は橋梁の単位体積重量， A は断面積， E はヤング率， I は断面 2 次モーメント， g は重力加速度である．合成桁橋の標準的な橋梁の支間長に対する諸元と 1 次の固有振動数を表 2.1 に示す．

表 2.1 橋梁の諸元¹⁵⁾

支間長 L(m)	総重量 W(×10 tonf)	曲げ剛性 EI(×10 ⁵ tonf・m ²)	1次の固有振動数 f ₁ (Hz)
20	4.84	6.21	6.23
30	7.46	12.42	3.79
40	10.68	24.41	2.94
50	13.60	42.20	2.45
60	15.52	65.78	2.11

2. 2. 2 車両および動吸振器のモデル化

図 2.1 において，橋梁上の $x=vt$ 点を走行する車両の運動方程式は，路面凹凸 $r(t)$ を考慮すると，車両の変位を鉛直下向きに $z(t)$ として次式で表される．

$$m_0 \ddot{z}(t) + c_0 \{\dot{z}(t) - \dot{y}(vt, t) - \dot{r}(t)\} + k_0 \{z(t) - y(vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (2-6)$$

ここで， m_0 ， c_0 ， k_0 はそれぞれ車両の質量，減衰係数およびばね定数， $y(vt, t)$ は車両直下の橋梁の変位である．

(2-6) 式の両辺を m_0 で割ると，次のような車両の基礎式が得られる．

$$\ddot{z}(t) + 2h_0\omega_0 \{\dot{z}(t) - \dot{y}(vt, t) - \dot{r}(t)\} + \omega_0^2 \{z(t) - y(vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (2-7)$$

ここで， h_0 ， ω_0 はそれぞれ車両の減衰定数と固有円振動数である．

次に，動吸振器の運動方程式を考える．動吸振器を橋梁上の $x=\lambda$ 점에設置し，変位を鉛直下向きに $d(t)$ とすると，運動方程式は次式で表される．

$$m_d \ddot{d}(t) + c_d \{\dot{d}(t) - \dot{y}(\lambda, t)\} + k_d \{d(t) - y(\lambda, t)\} = 0 \quad (2-8)$$

ここで， m_d ， c_d ， k_d はそれぞれ動吸振器の質量，減衰係数およびばね定数である．

(2-8) 式の両辺を m_d で割ると，次のような動吸振器の基礎式が得られる．

$$\ddot{d}(t) + 2h_d\omega_d \{\dot{d}(t) - \dot{y}(\lambda, t)\} + \omega_d^2 \{d(t) - y(\lambda, t)\} = 0 \quad (2-9)$$

ここで， h_d ， ω_d はそれぞれ動吸振器の減衰定数と固有円振動数である．

2. 3 プレートガーダー橋の有限帯板法によるモデル化

2. 3. 1 橋梁のモデル化

プレートガーダー橋の解析モデルを，より現実に近いものにするために，有限帯板法により直交異方性板としてモデル化する．

図2.2に示すように動吸振器を設置した橋梁上を，1自由度のばね-質点系でモデル化された単一車両が，一定速度 v で走行する場合を考える．車両は橋端から $x=a$ の車線を走行し，動吸振器は， $(x=b, y=\lambda)$ 点の位置に1個設置するものとする．橋梁の境界条件は，橋軸方向の2辺を単純支持，橋軸直角方向の2辺を自由端とする．

有限帯板法では，プレートガーダー橋を橋軸方向に n 個の帯板に分割し，橋軸方向の境界条件を満足する振動モードについて運動方程式を構成する．橋軸方向が k 次振動モードの場合，節線に挟まれた空間の変位を表現する変位関数は，以下のように表される．

$$S_k(x, y) = [\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \ \psi_4(x)] y_k(y) \quad (2-10)$$

ここで， $\psi_1(x)$ から $\psi_4(x)$ は，形状関数であり，

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{d^2} + \frac{2x^3}{d^3}, \quad \psi_2(x) = x - \frac{2x^2}{d} + \frac{x^3}{d^2} \\ \psi_3(x) &= \frac{3x^2}{d^2} - \frac{2x^3}{d^3}, \quad \psi_4(x) = -\frac{x^2}{d} + \frac{x^3}{d^2} \end{aligned} \quad (2-11)$$

で表される3次関数である． d は帯板要素の幅である．また， $y_k(y)$ は，境界条件を満足する単純支持梁の k 次振動モード

$$y_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}y\right) \quad (2-12)$$

を用いる．ここで， L は支間長である．橋軸方向を k 次振動モードと仮定した場合，各節線における，たわみ $w_i(t)$ とたわみ角 $\theta_i(t)$ から構成される節線変位ベクトルは，次式で定義される．

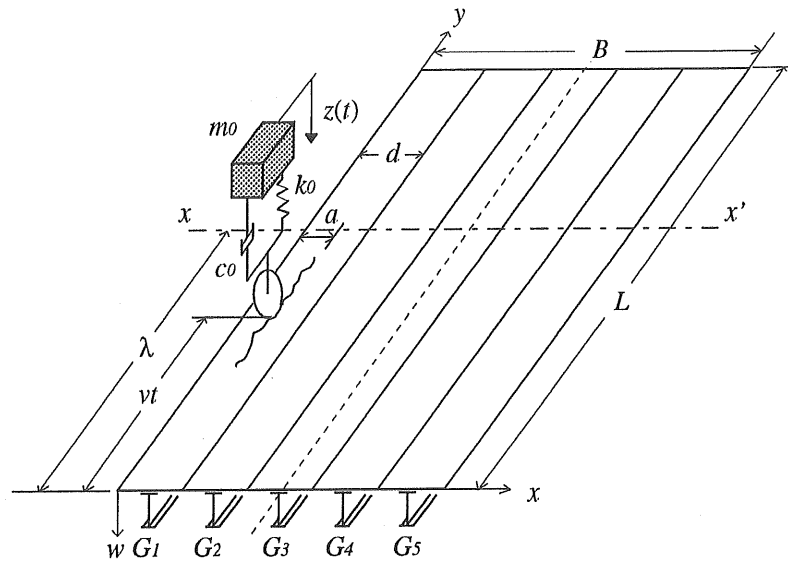
$$P_k(t) = [w_1(t) \ \theta_1(t) \ \cdots \ w_n(t) \ \theta_n(t)]_k^T \quad (2-13)$$

このような表現を用いると，図2.3に示す i 節線と $i+1$ 節線に挟まれた帯板の (x, y) 点のたわみは，橋梁を r 次振動まで考慮した場合，

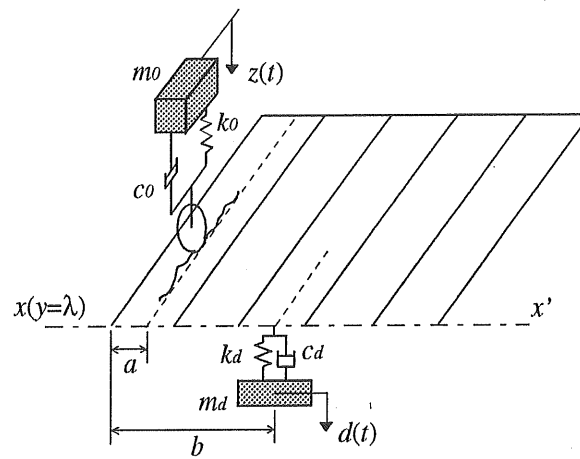
$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^r S_k(x, y) [P_k(t)]_{i, i+1} \quad (2-14)$$

で与えられる．ここで， $[P_k(t)]_{i, i+1}$ は， $P_k(t)$ の i 節線と $i+1$ 節線の要素から構成される以下のような節線変位ベクトルである．

$$[P_k(t)]_{i, i+1} = [w_i(t) \ \theta_i(t) \ w_{i+1}(t) \ \theta_{i+1}(t)]^T \quad (2-15)$$



(a) 橋梁-車両系モデル



(b) 車両と動吸振器のモデル

図 2.2 橋梁-動吸振器-車両系のモデル化

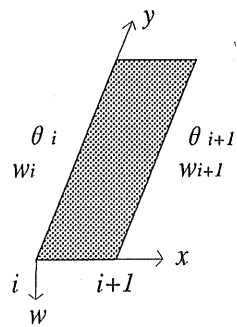


図 2.3 帯板要素

2. 3. 2 振動解析

橋軸方向が k 次振動モードの場合，橋軸直角方向の振動特性を表す非減衰自由振動の方程式は，

$$M_k \ddot{P}_k(t) + K_k P_k(t) = 0 \quad (2-16)$$

で与えられる．ここで， M_k と K_k は，それぞれ k 次振動モードにおける質量マトリックスと剛性マトリックスであり，これらは有限帯板法を用いる場合，以下のようなマトリックス¹¹⁾になる．

$$M_k = \rho t \begin{bmatrix} \frac{13}{70} Ld & \frac{11}{420} Ld^2 & \frac{9}{140} Ld & -\frac{13}{840} Ld^2 \\ & \frac{1}{210} Ld^3 & \frac{13}{840} Ld^2 & -\frac{3}{840} Ld^3 \\ & & \frac{13}{70} Ld & -\frac{11}{420} Ld^2 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{210} Ld^3 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

$$K_k = \begin{bmatrix} \frac{13Ld}{70} k_x^4 D_y + \frac{12L}{5d} k_x^2 D_{xy} & \frac{3L}{5} k_x^2 D_1 + \frac{L}{5} k_x^2 D_{xy} & \frac{9Ld}{140} k_x^4 D_y - \frac{12L}{5d} k_x^2 D_{xy} & -\frac{13Ld^2}{840} k_x^4 D_y + \frac{L}{5} k_x^2 D_{xy} \\ + \frac{6L}{5d} k_x^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & + \frac{3L}{d^2} D_x + \frac{11Ld^2}{420} k_x^4 D_y & -\frac{6L}{5d} k_x^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & + \frac{L}{10} k_x^2 D_1 + \frac{3L}{d^2} D_x \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \frac{Ld^3}{210} k_x^4 D_y + \frac{4Ld}{15} k_x^2 D_{xy} & \frac{13Ld^2}{840} k_x^4 D_y - \frac{L}{5} k_x^2 D_{xy} & -\frac{3Ld^3}{840} k_x^4 D_y - \frac{Ld}{15} k_x^2 D_{xy} \\ + \frac{2Ld}{15} k_x^2 D_1 + \frac{2L}{d} D_x & -\frac{L}{10} k_x^2 D_1 - \frac{3L}{d^2} D_x & -\frac{Ld}{30} k_x^2 D_1 + \frac{L}{d} D_x & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \frac{13Ld}{70} k_x^4 D_y + \frac{12L}{5d} k_x^2 D_{xy} & -\frac{11Ld^2}{420} k_x^4 D_y - \frac{L}{5} k_x^2 D_{xy} & \\ + \frac{6L}{5d} k_x^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & -\frac{3L}{5} k_x^2 D_1 - \frac{3L}{d^2} D_x & & \\ \text{sym.} & & & \\ & & \frac{Ld^3}{210} k_x^4 D_y + \frac{4Ld}{15} k_x^2 D_{xy} & \\ \left(k_k = \frac{k\pi}{L} \right) & & + \frac{2Ld}{15} k_x^2 D_1 + \frac{2L}{d} D_x & \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

ここで， L は帯板要素の橋軸方向の長さ， d は帯板要素の幅， ρt は単位面積当たりの質量， D_x, D_y, D_{xy}, D_1 はそれぞれ帯板要素の板曲げ剛性である． K_k の誘導法を付録 A に示す．

$P_k(t)$ が調和振動していると仮定すると，(2-16) 式の解は次のように与えられる．

$$P_k(t) = \phi_k \exp(j\omega_k t) \quad (2-19)$$

これを (2-16) 式に代入すると、以下の一般固有値方程式を得る。

$$(K_k - \omega_k^2 M_k) \phi_k = 0 \quad (2-20)$$

この式から k 次の橋軸方向に対する橋軸直角方向の固有円振動数 ω_{sk} および振動モード ϕ_{sk} が決定する。ここで、 ω_{sk} と ϕ_{sk} のサフィックス k は橋軸方向の振動次数を表し、サフィックス s は橋軸直角方向の振動次数を表す。これらを以下のようにマトリックス表示する。

$$\Omega_{k0} = \begin{bmatrix} \omega_{1k}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{nk}^2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{k0} = [\phi_{1k} \quad \cdots \quad \phi_{nk}] \quad (2-21)$$

ここでは、橋軸方向の振動モードを固定し、対応する橋軸直角方向の振動モードを求めこれを (2-21) 式のように表示している。そのため、橋軸方向が低次の振動モードの時でも、橋軸直角方向が高次の振動モードとなる場合もあり、(2-20) 式より得られる固有振動数が下から何番目の固有振動となっているかが分からない。そこでこれを振動数の低い順に並べ替える。このとき r 次振動までを考慮し、固有円振動数と振動モードベクトルを以下のように定義し直す。

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_r^2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_k = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_r] \quad (2-22)$$

ここで、 Ω は対角マトリックスである。

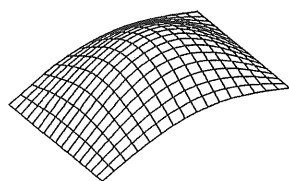
振動解析の対象とした橋梁は、阪神高速道路高架橋の単純活荷重合成桁である。その構造諸元^{15) 16)} および断面定数を表2.2と表2.3に示す。この断面定数を用いて振動解析を行う。得られた固有振動数と対応する振動モードを図2.4に示す。橋梁の変形に主にかかわってくるのは、大きなエネルギーを持つ低次振動であるため、ここでは、5次振動までの固有振動数および振動モードを示す。走行車両による橋梁振動は、上限が約 10(Hz) 程度であるため、本論文の状態推定や振動制御では、その中の3次振動までを考慮する。

表 2.2 プレートガーダー橋の諸元

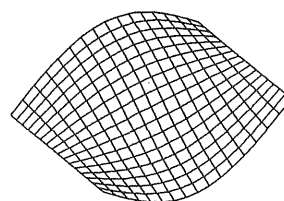
形 式	鋼単純活荷重合成桁
橋 格	一等橋
橋 長	27.0 (m)
支間長	26.4 (m)
全幅員	17.6 (m)
幅 員	15.4 (m)
車線数	4 車線
設計荷重	T L - 2 0

表 2.3 プレートガーダー橋の断面定数

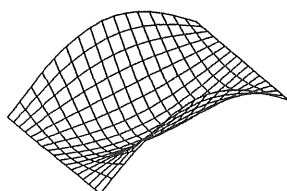
	G_1, G_5	$G_2 \sim G_4$
D_x (kgf · m)	1.48×10^7	1.48×10^7
D_y (kgf · m)	8.87×10^8	2.05×10^8
D_{xy} (kgf · m)	3.00×10^6	1.20×10^6
D_1 (kgf · m)	0	0
dk (m)	1.93	3.85



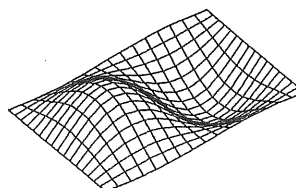
1 次モード (3.64 Hz)



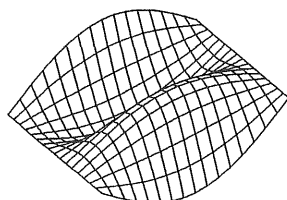
2 次モード (5.01 Hz)



3 次モード (7.62 Hz)



4 次モード (12.4 Hz)



5 次モード (15.6 Hz)

図 2.4 有限帯板法による振動モード

2. 3. 3 橋梁 - 動吸振器 - 車両系の基礎方程式

(1) 橋梁の方程式

基準座標を $q_k(t)$ として，これに振動解析より求めた (2-22) 式の振動モードマトリックス Φ_k をかけると，節線ベクトル $P_k(t)$ が与えられる．

$$P_k(t) = \Phi_k q_k(t) \quad (2-23)$$

これを (2-14) 式に代入すると， i 節線と $i+1$ 節線に挟まれた帯板 (x, y) 点のたわみ $w(x, y, t)$ が求められる．

橋梁に外力が作用し，減衰を考慮した場合の運動方程式は次式のように表される．

$$M_k \ddot{P}_k(t) + C_k \dot{P}_k(t) + K_k P_k(t) = F_k(t) \quad (2-24)$$

ここで， C_k は減衰係数マトリックス， F_k は外力ベクトルである．

本解析では，単一車両による荷重が 1 枚の帯板に作用し，1 個の動吸振器が設置されているものとする．このとき橋梁系の外力ベクトル $F_k(t)$ は，車両の接地力に関するベクトル $F_k^v(t)$ および動吸振器による制御力に関するベクトル $F_k^d(t)$ の和で表せる．

$$F_k(t) = F_k^v(t) + F_k^d(t) \quad (2-25)$$

帯板 $(j, j+1)$ に作用する車両の荷重ベクトルを $V_k(t)$ とすると， $F_k^v(t)$ は次式のように表現できる．

$$F_k^v(t) = \begin{bmatrix} 0_{1,j-1} \\ V_k(t) \\ 0_{j+2,n} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

ここで， $0_{m,n}$ は m 接線から n 接線に作用する力がゼロであることを示している．

単一車両が j 節線から $x=a$ の位置を速度 v で走行する図 2.2 のような場合， $V_k(t)$ は車両の接地力 $f_v(t)$ を用いることにより，次式のように表される．

$$V_k(t) = f_v(t) S_k(a, vt)^T \quad (2-27)$$

一方、車両が走行する帯板要素 $(s, s+1)$ に動吸振器を設置する場合、 $F_k^d(t)$ は次式のようにになる。

$$F_k^d(t) = \begin{bmatrix} 0_{l,s-1} \\ D_k(t) \\ 0_{s+2,n} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

ここで、 $D_k(t)$ は帯板 $(s, s+1)$ に対し動吸振器で発生させる制御力ベクトルである。

図 2.2 のように、1 個の動吸振器を (b, λ) 点に設置する場合、動吸振器が発生する制御力を $f_d(t)$ とすると $D_k(t)$ は、次式のようにになる。

$$D_k(t) = f_d(t) S_k(b, \lambda)^T \quad (2-29)$$

(2-23)，(2-25) 式を (2-24) 式に代入し、両辺に左側から Φ_k^T を乗じる。

$$\Phi_k^T M \Phi_k \ddot{q}(t) + \Phi_k^T C \Phi_k \dot{q}(t) + \Phi_k^T K \Phi_k q(t) = \Phi_k^T F_k^v(t) + \Phi_k^T F_k^d(t) \quad (2-30)$$

この式において、各マトリックスを次のように置き替える。

$$L_k = \Phi_k^T M \Phi_k, \quad H_k = L_k^{-1} \Phi_k^T C \Phi_k, \quad \Omega_k = L_k^{-1} \Phi_k^T K \Phi_k \quad (2-31)$$

ここで、 L_k は橋梁のモード質量を表すマトリックスの要素、 H_k および Ω_k はそれぞれ減衰定数と固有円振動数から構成されるマトリックスの要素である。これらは、次のような対角マトリックスになる。

$$L_k = \begin{bmatrix} L_{lk} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_{nk} \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} 2h_{lk}\omega_{lk} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2h_{nk}\omega_{nk} \end{bmatrix}, \quad \Omega_k = \begin{bmatrix} \omega_{lk}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{nk}^2 \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

また、振動モードマトリックスを次式のように分解する。

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} (\Phi_k)_{1,j-1} \\ Z_k^j \\ (\Phi_k)_{j+2,n} \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

この式を用いると、(2-30) 式の外力に関する項は、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \Phi_k^T F_k^v(t) + \Phi_k^T F_k^d(t) &= Z_k^{vjT} V_k(t) + Z_k^{djT} D_k(t) \\ &= Z_k^{vjT} S_k(a, vt)^T f_v(t) + Z_k^{djT} S_k(b, \lambda)^T f_d(t) \end{aligned} \quad (2-34)$$

ここで、 Z_k^{vj} 、 Z_k^{dj} はそれぞれ車両の接地力および動吸振器の制御力が作用する帯板 $(j, j+1)$ の振動モードである。

(2-30)，(2-31)，(2-34) 式より、外力が作用する橋梁

の運動方程式は次式のようになる。

$$\ddot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{H}_k \dot{\mathbf{q}}_k(t) + \mathbf{\Omega}_k \mathbf{q}_k(t) = \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{Z}_k^{vjT} S_k(a, vt)^T f_v(t) + \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{Z}_k^{djT} S_k(b, \lambda)^T f_d(t) \quad (2-35)$$

r 次振動まで考慮した橋梁の基準座標ベクトルを次式のように定義する。

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t)^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_r(t)^T]^T \quad (2-36)$$

これを (2-35) 式に代入すると， r 次振動まで考慮した橋梁の方程式は，次のように記述することができる。

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega} \mathbf{q}(t) = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z}^{vjT} S(a, vt)^T f_v(t) + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z}^{djT} S(b, \lambda)^T f_d(t) \quad (2-37)$$

ここで，

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{H}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{\Omega}_r \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{Z}_r \end{bmatrix}$$

である。

(2) 車両および動吸振器の方程式

1 自由度系でモデル化された車両の運動方程式は，路面凹凸 $r(t)$ を考慮した場合，車両の垂直変位を $z(t)$ とすると，車両直下の橋梁のたわみ $w(a, vt, t)$ を用いることにより，次式のように表される。

$$\ddot{z}(t) + 2h_0\omega_0\{\dot{z}(t) - \dot{w}(a, vt, t) - \dot{r}(t)\} + \omega_0^2\{z(t) - w(a, vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (2-39)$$

また，1 自由度系でモデル化された動吸振器の運動方程式は，動吸振器の変位を $d(t)$ とすると，次式で表される。

$$\ddot{d}(t) + 2h_d\omega_d\{\dot{d}(t) - \dot{w}(b, \lambda, t)\} + \omega_d^2\{d(t) - w(b, \lambda, t)\} = 0 \quad (2-40)$$

(2-37) 式における車両の接地力 $f_v(t)$ および動吸振器による制御力 $f_d(t)$ は，車両および動吸振器の加速度を用いて，それぞれ次式のように記述できる。

$$f_v(t) = -m_0\ddot{z}(t), \quad f_d(t) = -m_d\ddot{d}(t) \quad (2-41)$$

(2-41) 式を (2-37) 式に代入し整理すると，橋梁の基礎方程

式は最終的に次式のようになる．

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}\mathbf{q}(t) = -m_0\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Z}_v^{jT}\mathbf{S}(a, \nu t)^T\ddot{\mathbf{z}}(t) - m_d\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Z}_d^{jT}\mathbf{S}(b, \lambda)^T\ddot{\mathbf{d}}(t) \quad (2-42)$$

(2-42)，(2-40)，(2-39) 式が橋梁-動吸振器-車両系の基礎方程式である．

2. 4 トラスドランガー橋のモデル化

2. 4. 1 橋梁のモデル化

トラスドランガー橋に対し有限要素法を適用し，これを2次元骨組構造でモデル化する．振動解析を行うために，図2.5に示すようにトラスドランガー橋を，19節点35要素に分割する．質量は，集中質量とする．橋梁の境界条件は単純支持である．

まずは， n 節点の場合を考え，橋梁の k 番目の節点変位ベクトルを以下のように定義する．

$$\delta_k(t) = [u_k \ v_k \ \theta_k]^T \quad (2-43)$$

ここで， u_k は水平変位， v_k は垂直変位， θ_k は回転角である．

このとき，全節点の変位ベクトル $\mathbf{y}(t)$ は，次式で定義できる．

$$\mathbf{y}(t) = [\delta_1(t)^T \ \delta_2(t)^T \ \cdots \ \delta_n(t)^T]^T \quad (2-44)$$

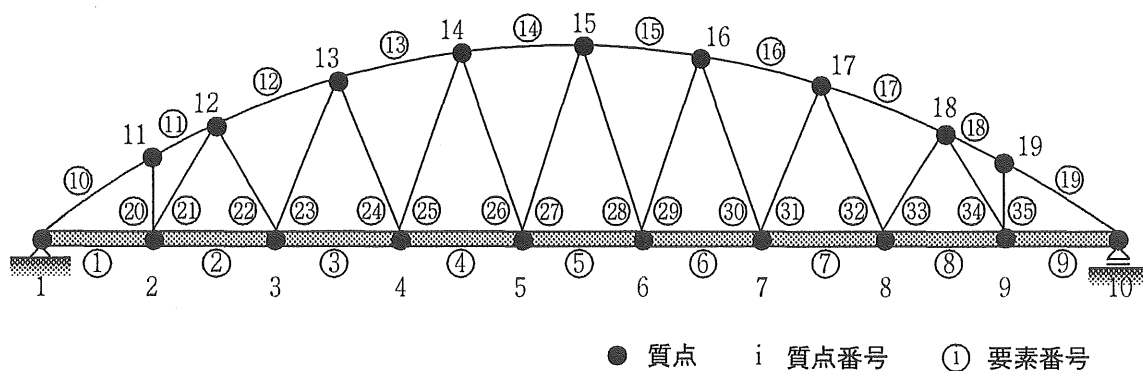


図 2.5 トラスドランガー橋の有限要素法によるモデル化

このモデルの有限要素法による質量マトリックスを M ，剛性マトリックスを K とする．非減衰系の自由振動の運動方程式は次式のよう
に記述できる．

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = 0 \quad (2-45)$$

この式に基づいて，振動解析を行う．橋梁を r 次振動まで考慮すると，それぞれ r 個の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ および固有ベクトル $\phi_1 \cdots \phi_r$ が得られる．固有値と固有ベクトルより，固有振動数および振動モードマトリックスは次のように得られる．すなわち，固有振動数は，

$$f_k = \sqrt{\lambda_k} / 2\pi \quad (k=1, \dots, r) \quad (2-46)$$

振動モードマトリックスは，

$$\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_r]$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{3n1} & \cdots & \phi_{3nr} \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

となる．

2. 4. 2 振動解析結果

解析の対象とするトラスランガー橋の一般図および諸元を図 2.6 と表 2.4 に示す．振動解析結果として得られた固有振動数とこれに対応する振動モードを図 2.7 に示す．走行車両による荷重を外力と考えているので，振動制御の対象となるのは， $10(\text{Hz})$ 以下の振動である．振動解析の結果より，3 次振動程度までを制御すれば良いことが分かる．

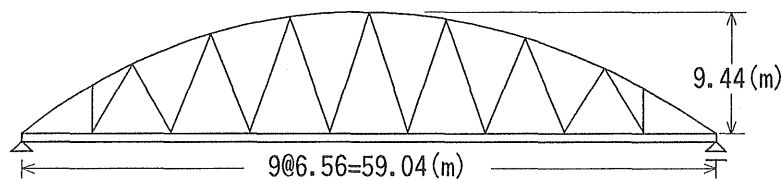
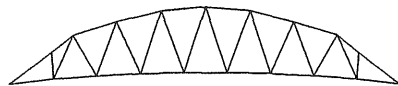


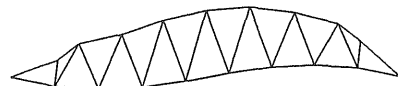
図 2.6 トラスランガー橋の一般図

表 2.4 橋梁の諸元

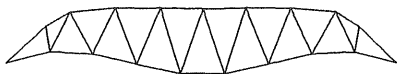
形 式	トラスドランガー橋
支間長	59.0 (m)
総重量	150 (tonf)
サ グ	9.44 (m)
補剛桁の断面積	$2.24 \times 10^{-2} \text{ (m}^2\text{)}$
拱肋の断面積	$1.23 \times 10^{-2} \text{ (m}^2\text{)}$
曲げ剛性	$1.78 \times 10^3 \text{ (tonf} \cdot \text{m}^2\text{)}$



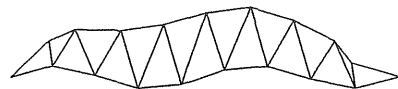
1 次モード (2.89 Hz)



2 次モード (4.86 Hz)



3 次モード (7.89 Hz)



4 次モード (10.7 Hz)

図 2.7 橋梁の振動モード

2. 4. 3 橋梁-車両-動吸振器系の基礎方程式

(1) 振動モードのフーリエ級数表示

有限要素法では，橋梁を n 節点で分割するため，振動モード ϕ_k が離散値となる．車両による外力は任意の地点に働くため，節点を外れた地点における有効外力が計算できない．そこで，離散型の振動モードを連続関数にする必要がある．これには，次のようなフーリエ級数¹⁷⁾を用いる．

$$\phi_i(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=0}^n \{a_{ik} \cos(m_k x) + b_{ik} \sin(m_k x)\} \quad (2-48)$$

ここで，

$$a_{ik} = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_i(x) \cos(m_k x) dx, \quad b_{ik} = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_i(x) \sin(m_k x) dx \quad (m_k = k\pi/L) \quad (2-49)$$

である．

(2-48)，(2-49) 式で 1 節点から 10 節点までを内挿した連続関数の振動モード図 2.8 に示す．実線が連続関数による振動モード，点線が離散値による振動モードである．

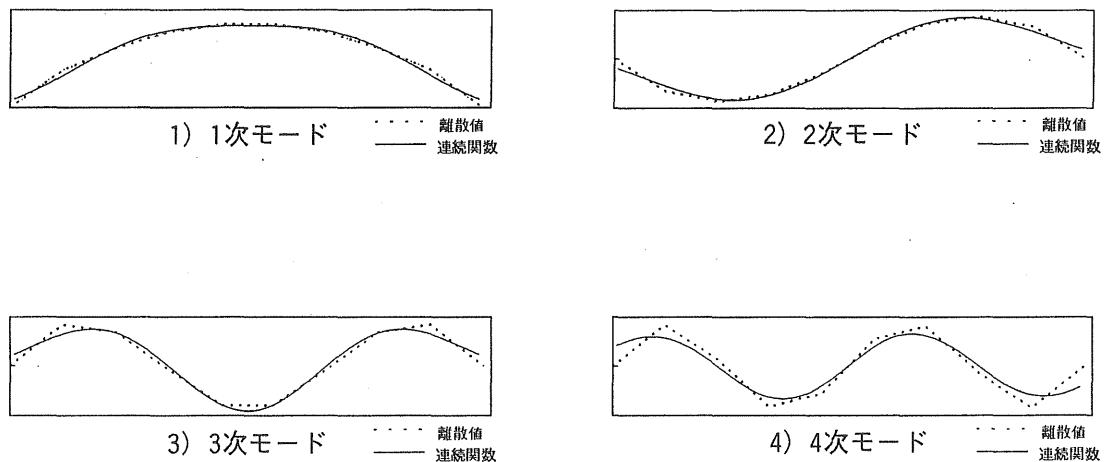


図 2.8 連続関数による振動モード

(2) 橋梁-車両-動吸振器系の基礎方程式

図2.9に，動吸振器を設置した橋梁上を，車両が走行する場合の橋梁-動吸振器-車両系のモデルを示す．橋梁の運動方程式は，次式で表される．

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) \quad (2-50)$$

ここで， C は減衰係数マトリックス， $F(t)$ は外力ベクトルである．

橋梁を r 次振動まで考慮し，基準座標 $q(t)$ を次のように定義する．

$$q(t) = [q_1(t) \ \cdots \ q_r(t)]^T \quad (2-51)$$

このとき， n 節点までの変位 $y(t)$ は，(2-47)式の振動モード Φ および(2-51)式の基準座標 $q(t)$ より次式で表現できる．

$$y(t) = \Phi q(t) \quad (2-52)$$

(2-52)式を(2-50)式に代入すると次式のようなになる．

$$M\Phi\ddot{q}(t) + C\Phi\dot{q}(t) + K\Phi q(t) = F(t) \quad (2-53)$$

この両辺の左側から Φ^T をかけ，各係数マトリックスを

$$\begin{cases} L = \Phi^T M \Phi \\ H = \Phi^T C \Phi \\ \Omega = \Phi^T K \Phi \end{cases} \quad (2-54)$$

と置き替える．これらは次のような対角マトリックスになる．

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & L_r \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2h_1\omega_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 2h_r\omega_r \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \omega_r^2 \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

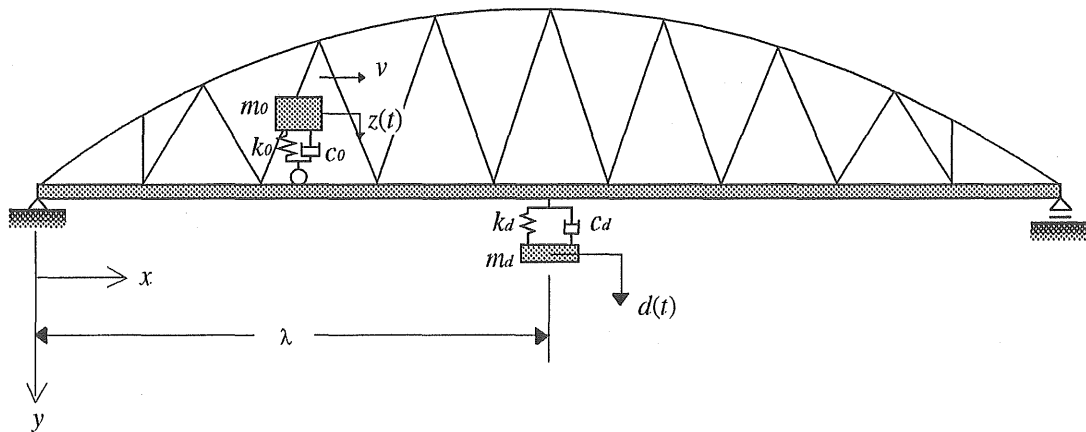


図 2.9 橋梁-動吸振器-車両系モデル

ここで、 ω_s は s 次の固有円振動数、 h_s は s 次の減衰定数である。

(2-54) 式において振動モードマトリックス Φ は、

$$L = \Phi^T M \Phi = I \quad (2-56)$$

となるように定義する。このとき、(2-53) 式は次式のようにになる。

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi^T F(t) \quad (2-57)$$

橋梁-動吸振器-車両系の方程式における外力ベクトル $F(t)$ は、車両の接地力に関するベクトル $F_v(t)$ および動吸振器の制御力に関するベクトル $F_d(t)$ の和で表せる。

$$F(t) = F_v(t) + F_d(t) \quad (2-58)$$

(2-58) 式を用いると (2-57) 式は次式のように記述できる。

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi^T F_v(t) + \Phi^T F_d(t) \quad (2-59)$$

連続型に変換した振動モードを改めて $\Phi(x)$ とおくと、(2-59) 式の運動方程式は、次のように表すことができる。

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi(vt)f_v(t) + \Phi(\lambda)f_d(t) \quad (2-60)$$

振動モードを連続系で表示した場合、 $\Phi(vt)$ は車両が橋梁上を t 時間走行した位置でのモードベクトルを表し、 $\Phi(\lambda)$ は動吸振器が設置されている位置でのモードベクトルを表す。このため、車両および動吸振器による外力 $f_v(t)$, $f_d(t)$ は、スカラー量になる。

車両および動吸振器の方程式は、梁モデルにおいて示した (2-7)、(2-9) 式のようになる。そこで、(2-60) 式における、車両の接地力 $f_v(t)$ と動吸振器による制御力 $f_d(t)$ は、それぞれ次式のように記述できる。

$$f_v(t) = -m_0 \ddot{z}(t), \quad f_d(t) = -m_d \ddot{d}(t) \quad (2-61)$$

(2-61) 式を (2-60) 式に代入し整理すると、トラストランガー橋の基礎方程式は最終的に次式のようになる。

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = -m_0 \Phi(vt) \ddot{z}(t) - m_d \Phi(\lambda) \ddot{d}(t) \quad (2-62)$$

2.5 吊床版歩道橋のモデル化

2.5.1 橋梁のモデル化

解析対象とする歩道橋は、大分県にある香下ダム吊床版橋である。この橋梁は、ダムの中に架設された2径間連続の吊床版歩道橋で、橋脚高さは31.5(m)である。モデルの諸元を表2.5、一般図を図2.10に示す。

表 2.5 吊床版歩道橋の諸元

橋名	香下吊床版橋
位置	大分県宇佐郡院内町大字香下地内
橋種	歩道橋
構造形式	2径間連続PC吊床版橋
基礎形式	直接基礎（グラウンドアンカー併用）
橋長	139 (m)
吊支間長	2@ 62.5 (m)
サグ	1.60 (m)
有効幅員	1.50 (m) (標準部)
活荷重	200 (kgf/m ²)
架設工法	プレキャスト版スライド架設工法

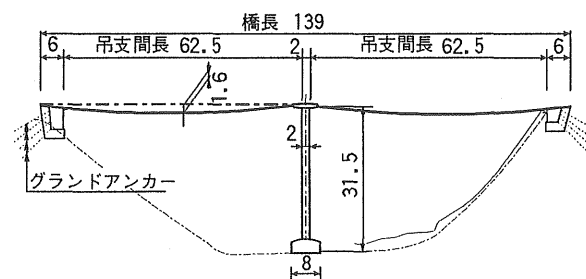


図 2.10 吊床版歩道橋の一般図

吊床版歩道橋には，考えられる歩調の振動数の範囲以内に多くの振動モードが存在する．

吊床版歩道橋の振動解析には，弦理論，ケーブル理論，有限要素法による2次元骨組構造および3次元骨組構造等でのモデル化⁴⁾が行われてきた．本研究では，この中で最も有効であるとされている，ケーブルの特性を考慮した有限要素法による3次元骨組構造でモデル化する．香下ダム吊床版橋に対し，3次元骨組構造を適用したものが図2.11である．床版剛性を示す床版モデル部材，張力による幾何学剛性を示す幾何剛性モデル部材および，これらを連結する横方向剛性モデル部材から構成されている．橋梁の質量は集中質量とし，床版モデル部材の軸上のみに存在するものとする．床版の橋軸方向の部材に関する剛性行列については，ケーブル要素を考えたものを用いる．また，回転慣性は橋軸回りの回転のみを考慮する．節点数は99，要素数は150である．上部構および橋脚部の境界条件は全て固定とする．

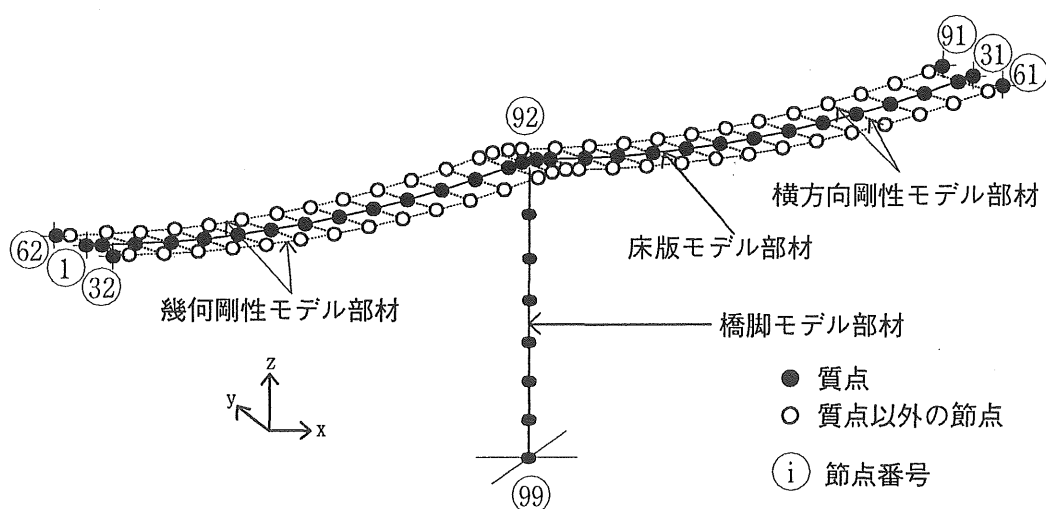


図 2.11 吊床版歩道橋の有限要素法によるモデル化

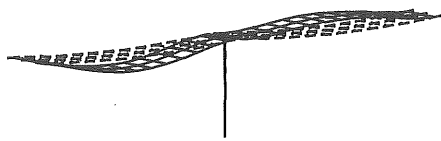
2. 5. 2 振動解析結果

振解析結果について，固有振動数および振動モードを表2.6と図2.12に示す．本研究では，ねじり振動の固有振動数および振動モードについても求めることができたが，歩行者の荷重は鉛直方向に作用するため，振動制御の対象としたのは曲げ振動のみとする．ここでは，人の歩調帯域が $1.5(\text{Hz})\sim 4.0(\text{Hz})$ であることを考慮し，この上限までの曲げ10次振動について表示する．

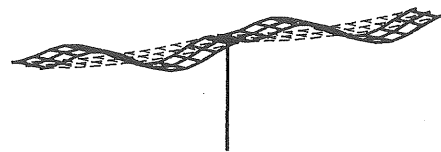
固有振動数の解析結果から，比較的低い振動数の範囲に多くの固有振動数が存在していることが分かる．他の橋梁にはあまり見られることはなく，吊床版歩道橋における振動特性を示している．吊床版歩道橋が歩行外力のように比較的低い振動数の外力を受ける場合，数多くの振動モードが励起される可能性を持つことになる．また，振動数が近接しているところは，それぞれ逆対称，対称の関係を示す振動モードである．曲げに関する2次と3次，5次と6次，7次と8次および9次と10次である．

表 2.6 吊床版歩道橋の固有振動数

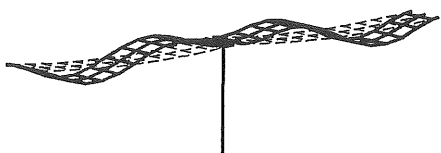
振 動 次 数	振 動 数 (Hz)
曲げ1次	0.5897
曲げ2次	1.1661
曲げ3次	1.1676
曲げ4次	1.4705
曲げ5次	1.9001
曲げ6次	2.0756
曲げ7次	2.7583
曲げ8次	2.7642
曲げ9次	3.7836
曲げ10次	3.8095



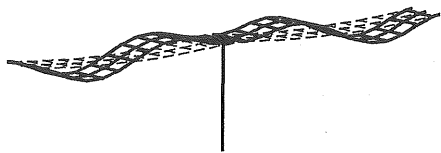
曲げ 1 次モード (0.5897Hz)



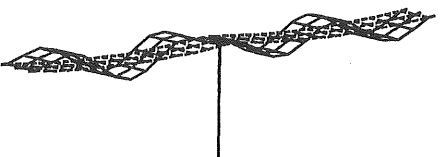
曲げ 2 次モード (1.1661Hz)



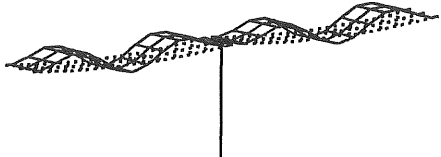
曲げ 3 次モード (1.1676Hz)



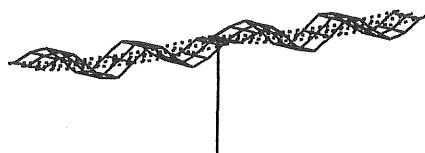
曲げ 4 次モード (1.4705Hz)



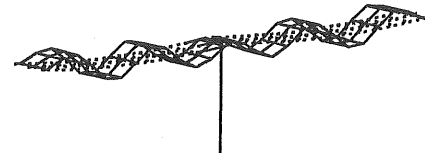
曲げ 5 次モード (1.9001Hz)



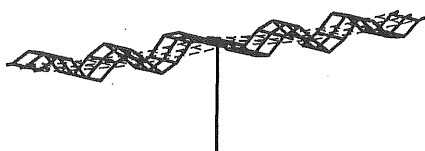
曲げ 6 次モード (2.0756Hz)



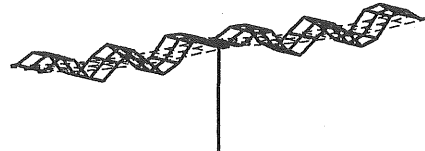
曲げ 7 次モード (2.7583Hz)



曲げ 8 次モード (2.7642Hz)



曲げ 9 次モード (3.7836Hz)



曲げ 1 0 次モード (3.8095Hz)

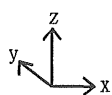


図 2.12 有限要素法による振動モード

2. 5. 3 歩行外力による橋梁の基礎方程式

(1) 振動モードのフーリエ級数表示

有限要素法を用いた振動解析では，振動モードが離散値となる．歩行外力は，橋梁上の任意の点に加わるため，離散値による振動モードでは各節点間での有効外力に誤差が生じる．そこで，吊床版歩道橋に対しても(2-48)，(2-49)式のフーリエ級数によりモードを連続関数に変換する．図2.13に， z 軸方向の曲げ1次振動から曲げ10次振動に関する有限要素法での離散的な振動モードおよび，こ

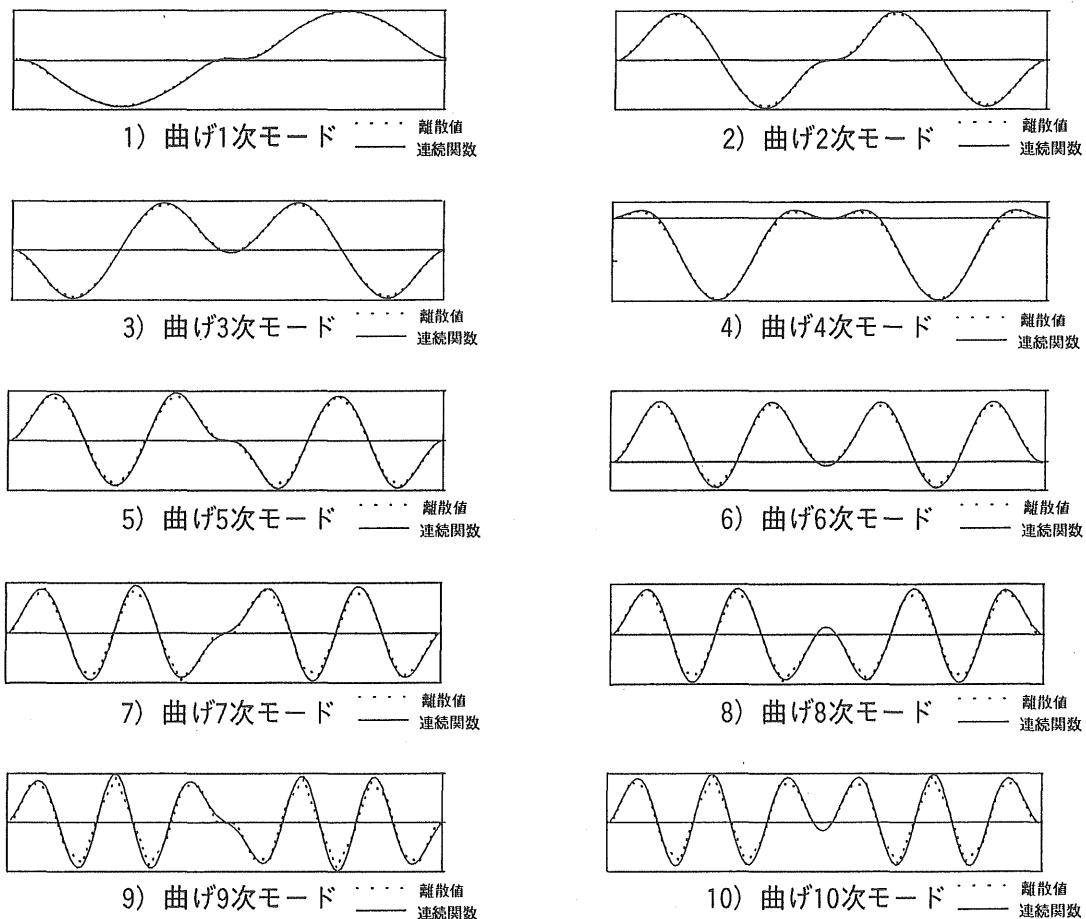


図 2.13 連続関数による振動モード

れをフーリエ級数で内挿した連続関数の振動モードを示す．実線が連続関数による振動モード，点線が離散値による振動モードである．

(2) 荷重のモデル化

吊床版歩道橋において， s 人が歩行する場合を考える．荷重は人がある一定の歩調，一定の速度で歩行するものとする．作用する荷重を，次のように正弦関数を用いてモデル化する．

$$f_i(t) = P_i \{ \sin(2\pi f_i t) \} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (2-63)$$

ここで， P_i は最大荷重， f_i は 1 秒間に歩行者の足が歩道橋に接する回数である．

(3) 歩行外力による橋梁の基礎式

図 2.14 に歩行外力による吊床版歩道橋のモデル図を示す．吊床版歩道橋の運動方程式は，以下のように表現できる．

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) \quad (2-64)$$

ここで，吊床版歩道橋のモデル化に有限要素法を用いた場合，質量マトリックス M ，減衰マトリックス C および剛性マトリックス K は

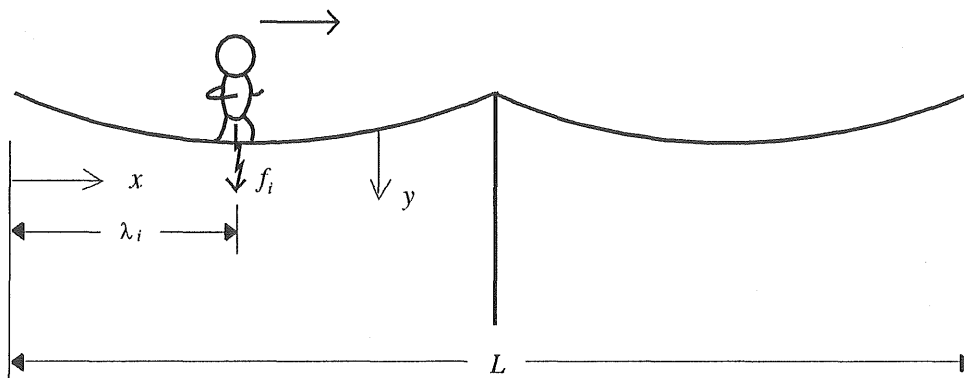


図2.14 歩行外力による吊床版歩道橋振動モデル

離散的なマトリックスとなる。したがって、(2-64)式において、変位 $y(t)$ を振動モードマトリックス Φ と基準座標 $q(t)$ で次式のように表すとき、 Φ は離散型を用いなければならない。

$$y(t) = \Phi q(t) \quad (2-65)$$

これを(2-64)式に代入し、 $\Phi^T m \Phi = I$ となるように Φ を定義した場合(2-64)式は、

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi^T F(t) \quad (2-66)$$

となる。この k 次振動の基準座標は次のようになる。

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \phi_k^T f_k(t) \quad (2-67)$$

ここで、 ϕ_k は振動モード行列 Φ の k 番目の列ベクトルである。

歩行外力に対して応答解析を行うためには、橋梁の方程式における振動モードを離散系から連続系へ変換する必要がある。

(2-67)式において、離散系から連続系へ変換された振動モード、すなわち、

$$\phi_k^T \rightarrow \phi_k(x) \quad (2-68)$$

を用いて s 個の外力が作用する場合、(2-67)式は次のように書き替えることができる。

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \sum_{i=1}^s \phi_k(\lambda_i) f_i(t) \quad (2-69)$$

ここで、 λ_i は外力の作用点である。

2. 6 まとめ

本研究において振動制御の対象とする橋梁は、プレートガーダー橋、トラスランガー橋および吊床版歩道橋である。本章では、これらの橋梁を、それぞれ梁、有限帯板法および有限要素法によりモデル化した。

本章で得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) プレートガーダー橋の梁によるモデルは，1次元弾性梁を用いたため構造が最も単純なものになった．動吸振器を設置した橋梁上を単一車両が走行する場合について定式化を行った．車両の振動は，橋梁上の路面凹凸により励起されるものとした．最も基本的な橋梁モデルであるために，振動制御則に対する大局的な評価が可能になった．

(2) プレートガーダー橋に対しては，より現実に近いモデルを構成するために，橋梁上部構造が2次元的な拡がりをもつ直交異方性板について考えた．これを有限帯板法によりモデル化したため，橋軸方向だけではなく，幅員方向を含む動特性を考えることが可能になった．走行車両による荷重を外力と考えたため，振動制御の対象となるのは， $10(\text{Hz})$ 程度までの振動である．振動解析の結果，3次振動程度までを制御すれば十分であることを確認した．橋梁の定式化は，任意の帯板に動吸振器と車両がある場合について行った．車両が偏載荷重状態になる場合に対して，橋梁の動的解析を厳密に行うことが可能になった．

(3) トラスランガー橋は，有限要素法を用い，2次元骨組構造でモデル化した．走行車両による荷重を外力と考えているので，振動制御の対象となるのは， $10(\text{Hz})$ 程度までの振動である．振動解析の結果，振動制御には3次振動までを考慮すればよいことを確認した．

(4) 吊床版歩道橋は，有限要素法を用い，3次元骨組構造でモデル化した．ここでは，歩行者の荷重を外力とした．歩行者の歩調の上限は $4(\text{Hz})$ とされており，これが鉛直方向に作用することになる．振動解析の結果，曲げ10次程度までを振動制御の対象とすればよいことを確認した．吊床版歩道橋は，低い振動数の範囲に多くの共振点を持つことが分かった．

参考文献

- 1) 岡林隆敏・加賀敏明・吉村徹・尾口慎也：単一車両が走行する道路橋の確率的制御理論による振動制御，土木学会論文集，1998.4.
- 2) 岡林隆敏・竹下渡・小西保則：単一走行車両によるプレートガーダー橋の不規則応答解析，構造工学論文集，Vol.37A,pp.965-973,1991.3.
- 3) 岡林隆敏・竹下渡：単一車両が走行するプレートガーダー橋の動吸振器の最適設計，構造工学論文集，Vol.39A,pp.671-680,1993.3.
- 4) 橋梁振動研究会：橋梁振動の計測と解析，技報堂出版，1993.10.
- 5) 梶川康男・津村直宣・角本周：PC吊床版歩道橋の振動とその使用性，土木学会論文集，No.36A,pp.685-695,1990.3.
- 6) 角本周・前田研一・梶川康男・黒野雅利：近接固有振動数を有する吊床版橋の振動使用性に関する検討，土木学会橋梁交通振動に関するコロキウム論文集 PART.A,pp.207-214,1995.11.
- 7) 岡林隆敏・岡部雅彦・角本周・梶川康男：歩行者による吊床版橋振動のアクティブ振動制御，第2回振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.167-174,1993.
- 8) 岡林隆敏・吉村徹・加賀敏明：走行車両による単純桁橋振動のカルマンフィルタによる状態推定，構造工学論文集，Vol.42A,pp.723-730,1996.4.
- 9) 岡林隆敏・尾口慎也・加賀敏明：各種フィードバック制御則による道路橋交通振動のアクティブ制御，構造工学論文集，Vol.42A,pp.731-738,1996.4.
- 10) 加賀敏明・岡林隆敏：スライディングモード理論による道路橋交通振動のアクティブ制御，土木構造・材料論文集，第13号，pp.49-57,1997.12.
- 11) 草間晴幸・谷山健：有限帯板法，日刊工業新聞社，1994.4.
- 12) Y.K.Cheung:Finite Strip Method in Structural Analysis,Pergamon Press,1976.

- 13) 小堀為雄・吉田博：有限要素法による構造解析プログラム,丸善,1980.12.
- 14) 岡林隆敏・馬渡あかね・加賀敏明：MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の歩行者励起振動の解析と制御設計,構造工学論文集,Vol.43A,pp.693-702,1997.3.
- 15) 阪神高速道路公団（財）道路環境研究所：道路交通振動対策に関する研究業務報告書,1990.3.
- 16) 社団法人日本道路協会：道路橋示方書・同解説,Ⅰ共通編,Ⅲコンクリート橋編,1978.5.
- 17) 和達三樹：物理のための数学,岩波書店,1983.3.

第 3 章 各種制御理論の定式化

3. 1 はじめに

橋梁の振動制御の方法には，パッシブ制御，アクティブ制御^{1) 2)}およびハイブリッド制御³⁾が考えられる．橋梁には，多数の振動モードが存在するため，パッシブ制御でこれらを制御するためには，振動モードの数だけ制御装置が必要になる．このため，一つの制御装置で各振動モードを同時に制御できるアクティブ制御やハイブリッド制御が，近年，注目を集めている．

構造物の振動制御をアクティブ制御またはハイブリッド制御で行う場合，通常は，フィードバック制御^{4) 5) 6)}が行われる．フィードバック制御は，周波数応答法に基づく古典的制御理論と状態空間法に基づく現代制御理論⁷⁾に大別される．古典的制御理論は，システムの内部情報を問題にせず，1入力1出力系のみを扱う．これに対し，現代制御理論では，状態フィードバックが基本になるため，内部情報を状態変数として記述する．このため，多入力多出力系を扱うことが可能になる．本章では，まず，第2章で示した各橋梁システムの方程式から，状態方程式を誘導する．

システムが状態空間表示された場合，次に問題となるのは，状態フィードバックを行う際の重み係数であるフィードバックゲインベクトルの決定方法である．これまでの橋梁の振動制御に関する研究では，定常最適レギュレータ理論^{7) 8) 9) 10) 11)}によるものが一般的であった．しかし，橋梁-車両系は，橋梁の見かけ上の固有振動数が時間的に変化する時変系¹²⁾になるため，定常な制御理論では，効果的な制御を期待できない場合が考えられる．本章では，時変系振動を厳密に制御できる非定常最適レギュレータ理論，瞬時最適化制御理論^{5) 9) 13)}，瞬時最適化制御理論を拡張した多段階制御理論および，時変系振動に有効なスライディングモード理論^{14) 15)}を橋

梁 - 車両系振動のハイブリッド制御に適用し，そのための定式化¹⁶⁾
17) 18) 19)を試みる．

最適レギュレータ理論は，二次形式の評価関数を導入しこれを最小化することで制御系を設計する．評価関数を最小化するには，フィードバックゲインベクトルの決定にリカッチ方程式を用いることにより実現できる．定常理論において，リカッチ方程式が時間的変動のない代数方程式であるのに比べ，非定常理論では，時間的変動を伴う微分方程式になる．このため，決定されるフィードバックゲインは，システムの変動に追従するものになり，より効果的な制御が実現できる．しかし，非定常レギュレータ理論では，リカッチ方程式を実際の時刻と逆向きに解く必要があるために，これを実現することはできない．

瞬時最適化制御理論は，1987年にJ.N.Yangら⁵⁾によって提案された制御理論である．最適レギュレータ理論では，評価関数を一定の値に固定させフィードバックゲインを決定する．一方，瞬時最適化制御理論では，評価関数を各時刻で設定し可変ゲイン係数を求める可能性を持っている．また，制御則が差分形式⁹⁾で記述されているために，外乱情報をより積極的に取り入れることができる．瞬時最適化制御理論は，最適レギュレータ理論に比べ時変系振動により適した理論である．本研究では，時変系の特性をさらに強く影響させるために，この理論を拡張した多段階瞬時最適化制御理論の提案を行う．

スライディングモード理論は，1950年代初頭，旧ソ連で誕生した制御理論である．当時は，理論的な研究が主に行われてきたが，近年のパーソナルコンピュータやDSP等のめざましい発達により，この理論の特徴である制御入力の切り換えの自由度が増し実用化が期待され始めた．現在においては，ポスト現代制御理論として，最も

注目を集めている制御理論の一つになっている。スライディングモード理論は，位相平面に切換線を設計し，システムの応答をこの線上に拘束しながらスライドさせる滑り状態を実現することで，応答を原点に収束させる．滑り状態を実現させるために，制御力を不連続に切り換える．このため非線形制御の性質を持ち，可変構造制御理論に分類されている．応答を切換線に拘束するため，非線形系，パラメータ変動系，時変系，未知外乱等に優れたロバスト性¹⁵⁾（頑強性）を有する．橋梁-車両系は，橋梁の固有振動数が時間的に変化する時変系になるため，制御対象のパラメータ変動に対してロバストなスライディングモード理論を適用する．

3. 2 橋梁系の状態空間表示

3. 2. 1 プレートガーダ橋の梁モデル

プレートガーダ橋の梁モデルの場合，橋梁 x 地点における動的たわみ $y(x,t)$ は，第2章で示したように，次式で表される．

$$y(x,t) = \Phi(x)q(t) \quad (3-1)$$

橋梁-動吸振器-車両系の基礎方程式は，(2-2)，(2-7)，(2-9)式により構成される．

橋梁を r 次振動まで考慮した場合の橋梁-動吸振器-車両系の状態変数および路面凹凸の変数ベクトル $r(t)$ を以下のように定義する．

$$q(t) = [q_1(t) \cdots q_r(t)]^T \quad (3-2)$$

$$x(t) = [q(t)^T \dot{q}(t)^T d(t) \dot{d}(t) z(t) \dot{z}(t)]^T \quad (3-3)$$

$$r(t) = [r(t) \dot{r}(t)]^T \quad (3-4)$$

このとき，動吸振器に制御力を加えるハイブリッド制御の場合，橋梁-動吸振器-車両系の状態方程式は次のように記述することがで

きる.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)r(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\quad (3-5)$$

ここで, $A(t)$ は $(2r+4) \times (2r+4)$ の係数マトリックス, $B(t)$ は $(2r+4) \times 1$ の制御入力に係わるベクトル, $D(t)$ は $(2r+4) \times 2$ の外力に係わるマトリックスである. 以下にその構成を示す.

係数マトリックス $A(t)$ は, 橋梁系に関する部分と動吸振器-車両系に関する要素に分解できる.

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_B(t) & A_{BV}(t) \\ A_{VB}(t) & A_V(t) \end{bmatrix}\quad (3-6)$$

$A_B(t)$ は橋梁系の係数マトリックスであり, 次のような $(2r \times 2r)$ マトリックスから構成されている.

$$A_B(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\quad (3-7)$$

$A_{BV}(t), A_{VB}(t)$ は, それぞれ次のような $(2r \times 4)$, $(4 \times 2r)$ マトリックスから構成されている.

$$A_{BV}(t) = \begin{bmatrix} 0_1 & 0_1 & 0_1 & 0_1 \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}\quad (3-8)$$

$$A_{VB}(t) = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 \\ a_{41} & a_{42} \\ 0_2 & 0_2 \\ a_{61} & a_{62} \end{bmatrix}\quad (3-9)$$

$A_V(t)$ は, 動吸振器-車両系の (4×4) の係数マトリックスであり, 次のような要素から構成されている.

$$A_V(t) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}\quad (3-10)$$

ここで, 0 は $(r \times r)$ のゼロマトリックス, I は $(r \times r)$ の単位マトリックス, $0_1, 0_2$ は $(r \times 1)$ のゼロベクトルと $(1 \times r)$ のゼロベクトルである. a_{21} から a_{26} , a_{41} から a_{44} および, $a_{61}, a_{62}, a_{65}, a_{66}$ はそれぞれ次のように表される.

$$\left. \begin{aligned}
a_{21} &= -\Omega - \omega_0^2 \mu_{kv} \Phi(vt)^T \Phi(vt) - \omega_d^2 \mu_{kd} \Phi(\lambda)^T \Phi(\lambda) \\
a_{22} &= -H - 2h_0 \omega_0 \mu_{kv} \Phi(vt)^T \Phi(vt) - 2h_d \omega_d \mu_{kd} \Phi(\lambda)^T \Phi(\lambda) \\
a_{23} &= \omega_d^2 \mu_{kd} \Phi(\lambda) \quad , \quad a_{24} = 2h_d \omega_d \mu_{kd} \Phi(\lambda) \\
a_{25} &= \omega_0^2 \mu_{kv} \Phi(vt) \quad , \quad a_{26} = 2h_0 \omega_0 \mu_{kv} \Phi(vt) \\
a_{41} &= \omega_d^2 \Phi(\lambda) \quad , \quad a_{42} = 2h_d \omega_d \Phi(\lambda) \\
a_{43} &= -\omega_d^2 \quad , \quad a_{44} = -2h_d \omega_d \\
a_{61} &= \omega_0^2 \Phi(vt) \quad , \quad a_{62} = 2h_0 \omega_0 \Phi(vt) \\
a_{65} &= -\omega_0^2 \quad , \quad a_{66} = -2h_0 \omega_0
\end{aligned} \right\} (3-11)$$

制御入力に係わるベクトル $B(t)$ は、橋梁系に関する部分と動吸振器-車両系に関する部分に分割できる。

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_B(t) \\ B_V(t) \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$B_B(t)$ と $B_V(t)$ は、それぞれ橋梁系と動吸振器-車両系に関する $(2r \times 1)$ および (4×1) ベクトルであり、次のように表すことができる。

$$B_B(t) = \begin{bmatrix} \theta_I \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad B_V(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{41} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

ここで、 b_{21} と b_{41} は、それぞれ次のように表される。ここで、 b_{21} は $(r \times 1)$ ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned}
b_{21} &= -\Phi(\lambda)/m_k \\
b_{41} &= 1/m_d
\end{aligned} \right\} (3-14)$$

外力に係わるマトリックス $D(t)$ は、橋梁系に関する部分と動吸振器-車両系に関する部分に分割できる。

$$D(t) = \begin{bmatrix} D_B(t) \\ D_V(t) \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$D_B(t)$ と $D_V(t)$ は、それぞれ橋梁系および動吸振器-車両系に関する $(2r \times 2)$ および (4×2) の係数マトリックスである。

$$D_B(t) = \begin{bmatrix} \theta_I & \theta_I \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad D_V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ d_{61} & d_{62} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

ここで、 d_{21} , d_{22} , d_{61} , d_{62} は、それぞれ次のようになる。なお、 d_{21} と d_{22} は $(r \times 1)$ ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned}
d_{21} &= -\omega_0^2 \mu_{kv} \Phi(vt) \quad , \quad d_{22} = -2h_0 \omega_0 \mu_{kv} \Phi(vt) \\
d_{61} &= \omega_0^2 \quad , \quad d_{62} = 2h_0 \omega_0
\end{aligned} \right\} (3-17)$$

3. 2. 2 プレートガーダー橋の有限帯板モデル

プレートガーダー橋の帯板における動的たわみは，第2章で定義したマトリックスを用いると，次式で表される．

$$w(x, y, t) = S(x, y)Z^i p(t) \quad (3-18)$$

この式の Z^i は，帯板 $(i, i+1)$ の振動モードマトリックスである．

橋梁-動吸振器-車両系の基礎方程式は，(2-39)，(2-40)，(2-42)式により構成される．

次に，橋梁の振動を r 次振動まで考える．この場合も，橋梁-動吸振器-車両系の状態変数ベクトルおよび路面凹凸ベクトルを梁モデルの場合と同様に(3-2)，(3-3)，(3-4)式のように定義する．橋梁-動吸振器-車両系の状態方程式は，(3-5)式と同じ式で表される．プレートガーダー橋の A, B, D の各要素は以下のようになる．
 a_{21} から a_{26} ， a_{41} から a_{44} および， a_{61} ， a_{62} ， a_{65} ， a_{66} はそれぞれ次のように表される．ここで， a_{21} と a_{22} は $(r \times r)$ マトリックス， a_{23} から a_{26} は $(r \times 1)$ ベクトル， a_{41} ， a_{42} ， a_{61} および a_{62} は $(1 \times r)$ ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= -\Omega - \omega_0^2 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T S(a, vt) Z^j \\ &\quad - \omega_d^2 m_d L^{-1} Z^{jT} S(b, \lambda)^T S(b, \lambda) Z^j \\ a_{22} &= -H - 2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T S(a, vt) Z^j \\ &\quad - 2h_d \omega_d m_d L^{-1} Z^{jT} S(b, \lambda)^T S(b, \lambda) Z^j \\ a_{23} &= \omega_d^2 m_d L^{-1} Z^{jT} S(b, \lambda)^T, \quad a_{24} = 2h_d \omega_d m_d L^{-1} Z^{jT} S(b, \lambda)^T \\ a_{25} &= \omega_0^2 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T, \quad a_{26} = 2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T \\ a_{41} &= \omega_d^2 S(b, \lambda) Z^j, \quad a_{42} = 2h_d \omega_d S(b, \lambda) Z^j \\ a_{43} &= -\omega_d^2, \quad a_{44} = -2h_d \omega_d \\ a_{61} &= \omega_0^2 S(a, vt) Z^j, \quad a_{62} = 2h_0 \omega_0 S(a, vt) Z^j \\ a_{65} &= -\omega_0^2, \quad a_{66} = -2h_0 \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

b_{21} ， b_{41} はそれぞれ次のようになる．なお， b_{21} は $(r \times 1)$ ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} b_{21} &= -LZ^{jT} S(b, \lambda)^T \\ b_{41} &= 1/m_d \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

d_{21} ， d_{22} ， d_{61} ， d_{62} はそれぞれ次のようになる．ここで， d_{21} と d_{22} は $(r \times 1)$

ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} d_{21} &= -\omega_0^2 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T, & d_{22} &= -2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} Z^{jT} S(a, vt)^T \\ b_{61} &= \omega_0^2, & b_{62} &= 2h_0 \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

3. 2. 3 トラスドランガー橋モデル

トラスドランガー橋の橋梁 x 地点における動的たわみ $y(x, t)$ は，梁モデルと同様に (3-1) 式で表現できる．

第2章で示したように，橋梁-動吸振器-車両系の基礎方程式は，(2-7)，(2-9)，(2-62) 式により構成される．

次に，橋梁の振動を r 次振動まで考える．橋梁-動吸振器-車両系の状態変数ベクトルおよび路面凹凸ベクトルを梁モデルの場合と同様に (3-2)，(3-3)，(3-4) 式のように定義する．橋梁-動吸振器-車両系の状態方程式は，(3-5) 式と同じ式になる．

トラスドランガー橋の A, B, D の各要素は以下のようになる． a_{21} から a_{26} ， a_{41} から a_{44} および， a_{61} ， a_{62} ， a_{65} ， a_{66} はそれぞれ次のように表される．ここで， a_{21} と a_{22} は $(r \times r)$ マトリックス， a_{23} から a_{26} は $(r \times 1)$ ベクトル， a_{41} ， a_{42} ， a_{61} および a_{62} は $(1 \times r)$ ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= -\Omega - \omega_0^2 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T \Phi(vt) - \omega_d^2 m_d L^{-1} \Phi(\lambda)^T \Phi(\lambda) \\ a_{22} &= -H - 2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T \Phi(vt) - 2h_d \omega_d m_d L^{-1} \Phi(\lambda)^T \Phi(\lambda) \\ a_{23} &= \omega_d^2 m_d L^{-1} \Phi(\lambda)^T, & a_{24} &= 2h_d \omega_d m_d L^{-1} \Phi(\lambda)^T \\ a_{25} &= \omega_0^2 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T, & a_{26} &= 2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T \\ a_{41} &= \omega_d^2 \Phi(\lambda), & a_{42} &= 2h_d \omega_d \Phi(\lambda) \\ a_{43} &= -\omega_d^2, & a_{44} &= -2h_d \omega_d \\ a_{61} &= \omega_0^2 \Phi(vt), & a_{62} &= 2h_0 \omega_0 \Phi(vt) \\ a_{65} &= -\omega_0^2, & a_{66} &= -2h_0 \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

b_{21} ， b_{41} はそれぞれ次のようになる．なお， b_{21} は $(r \times 1)$ ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} b_{21} &= -L \Phi(\lambda)^T \\ b_{41} &= 1/m_d \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

d_{21} ， d_{22} ， d_{61} ， d_{62} はそれぞれ次のようになる．ここで， d_{21} と d_{22} は $(r \times 1)$ ベクトルである．

$$\left. \begin{aligned} d_{21} &= -\omega_0^2 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T, & d_{22} &= -2h_0 \omega_0 m_0 L^{-1} \Phi(vt)^T \\ d_{61} &= \omega_0^2, & d_{62} &= 2h_0 \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

3. 2. 4 吊床版歩道橋モデル

第2章において，吊床版歩道橋における橋梁の基準座標の方程式は(2-69)式で示された．一人が一定速度 v で歩行する場合で考え，橋梁の $\lambda=vt$ 点に達したとき，(2-69)式は次式のようになる．

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \phi_k(\lambda) f(t) \quad (3-25)$$

橋梁の振動を r 次振動まで考え，橋梁系の基準座標ベクトルを次式のように定義する．

$$q(t) = [q_1(t) \cdots q_r(t)]^T \quad (3-26)$$

このとき，橋梁の a 点に制御力 $u(t)$ を加える場合，(3-25)式で示された橋梁の方程式は，次式のように記述できる．

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi(a)u(t) + \Phi(\lambda)f(t) \quad (3-27)$$

ここで， Ω と H は固有円振動数および減衰定数で構成される $(r \times r)$ マトリックス， $\Phi(a)$ と $\Phi(\lambda)$ は制御力および歩行者による荷重が作用する点における $(n \times 1)$ の振動モードベクトルであり，それぞれ以下のように構成される．

$$\Phi(a) = [\phi_1(a) \cdots \phi_r(a)]^T \quad (3-28)$$

$$\Phi(\lambda) = [\phi_1(\lambda) \cdots \phi_r(\lambda)]^T \quad (3-29)$$

また，(3-27)式の歩行者による外力 $f(t)$ は，(2-63)において一人が歩行する場合を考えると，以下のように表される．

$$f(t) = P\{\sin(2\pi ft)\} \quad (3-30)$$

次に，(3-26)式より状態変数ベクトルを次式のように定義する．

$$x(t) = [q(t)^T \quad \dot{q}(t)^T]^T \quad (3-31)$$

これを基に，(3-27)式を状態空間表示すると，次式のようになる．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t) \quad (3-32)$$

ここで、 A は $(2r \times 2r)$ の係数マトリックス、 B は $(2r \times 1)$ の制御入力に係わるベクトル、 D は $(2r \times 1)$ の外力に係わるベクトルであり以下のように表される。

係数マトリックス $A(t)$ は、

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -H \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

ここで、 0 と I は $(r \times r)$ のゼロマトリックスおよび単位マトリックスである。

制御入力に係わるベクトル $B(t)$ は、

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0_l \\ \Phi(a) \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

ここで、 0_l は $(r \times 1)$ のゼロベクトルである。

外力に係わるベクトル $D(t)$ は、

$$D = \begin{bmatrix} 0_l \\ \Phi(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

である。

3. 3 最適レギュレータ理論

各橋梁によるシステムの状態方程式は、吊床版歩道橋以外同一の記述になる。このため、最適レギュレータ理論の制御系の設計において、梁モデルの説明で示した (3-5) 式を用いる。後で述べる、他の制御理論の式の誘導においてもこれを用いる。

最適レギュレータ理論では、(3-5) 式に対して、次式で表される二次形式の評価関数を導入する。これを最小化するようにフィードバックゲインマトリックスを決定する。

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (3-36)$$

ここで、状態変数 $x(t)$ を n 次元、制御力ベクトル $u(t)$ を m 次元とする。 Q と R は $(n \times n)$ および $(m \times m)$ の重みマトリックス⁷⁾で、それぞれ非負

定値と正定値で構成される正方対称マトリックスである。第1項は、応答の振動エネルギーに相当するものを表す。これが小さいということは、制御対象があまり振動していないということである。 Q を増加させることで、相対的に状態変数 $x(t)$ の収束性を増すことができる。第2項は、制御力のエネルギーに関する項であり、これが小さいということは、小さなエネルギーで制御が実現できることを表す。重み R を増加させることにより、相対的に制御力 $u(t)$ を減少させることができる。

フィードバック制御の場合、(3-36)式の制御力 $u(t)$ は次式のよう記述できる。

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3-37)$$

システムが時変系の場合、フィードバックゲイン K は時間に依存したものになり、次の非定常のリカッチ方程式から計算できる。この場合の K は、 $(m \times n)$ マトリックスである。

$$K(T-\tau) = R^{-1}B_1^T P(T-\tau) \quad (T-\tau=t) \quad (3-38)$$

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\tau}P(\tau) = P(\tau)A_1(\tau) + A_1(\tau)^T P(\tau) - P(\tau)B_1 R^{-1}B_1^T P(\tau) + Q \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (3-39)$$

ここで、 T は終端時刻、 t は実時刻を表し、 P は $(n \times n)$ マトリックスである。

このフィードバックゲイン K を用いると、(3-36)式の評価関数 J は、最小値を得ることになり、最適制御が実現できる。しかし、(3-39)式で示したリカッチ方程式は、終端時刻と実時刻の差による微分方程式で記述されている。つまり、リカッチ方程式を実際の時刻とは逆向きに解くことになるため実用に適したものではない。

そこで、システムを時不変系として定常応答を考える。(3-39)式において、 $\dot{R}(\tau) \rightarrow 0(\tau \rightarrow \infty)$ とすることにより、非定常のリカッチ方程式から、次のような代数方程式で記述される定常のリカッチ方程式を導く。

$$K = R^{-1} B_1^T P \quad (3-40)$$

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3-41)$$

走行車両による道路橋振動制御では， $A(t)$ は時変系となるため $A(t)$ の代表値として車両が橋梁の midpoint に達した時刻 $t_l = (L/2)/v$ での値 $A(t_l)$ を用いる．

3. 4 瞬時最適化理論

3. 4. 1 運動方程式の離散表示

瞬時最適化理論では，誘導される制御則が差分形式で記述される．従って，状態方程式の差分化が必要になる．本研究では，Pade近似²⁰⁾を用いてこれを行う．

橋梁系の状態方程式が (3-5) 式で記述できる場合，この式の解は，線形微分方程式の理論より，状態遷移行列 e^{Akt} を用いて以下のよう表現できる．

まず， $t \leq \tau \leq t+h$ 区間で (3-5) 式を差分表示する．

$$x(t+h) = e^{Akt} x(t) + \int_t^{t+h} e^{A_k(t+h-\tau)} (B(t)u(\tau) + D(t)r(\tau)) d\tau \quad (3-42)$$

ここで， $\tau - t = \sigma$ とおくと，

$$x(t+h) = e^{Akt} x(t) + \int_0^h e^{A_k(t+h-\sigma)} (B(t+\sigma)u(t+\sigma) + D(t+\sigma)r(t+\sigma)) d\sigma \quad (3-43)$$

次に，

$$\begin{cases} x(t+h) = x_k \\ x(t) = x_{k-1} \end{cases} \quad (3-44)$$

とおくと，(3-43) 式は，

$$x_k = e^{A_k h} x_{k-1} + \int_0^h e^{A_k(h-\sigma)} [B_{k-1}u_{k-1} + D_{k-1}r_{k-1} + (B_k u_k - B_{k-1}u_{k-1} + D_k r_k - D_{k-1}r_{k-1})\sigma/h] d\sigma \quad (3-45)$$

これを整理すると

$$x_k = S_{k1}x_{k-1} + S_{k2}(B_{k-1}u_{k-1} + D_{k-1}r_{k-1}) + S_{k3}(B_k u_k + D_k r_k) \quad (3-46)$$

ここで，

$$\begin{aligned}
S_{k1} &= e^{A_k h} \\
S_{k2} &= \left[e^{A_k h} h - (e^{A_k h} - I) A_k^{-1} \right] A_k^{-1} / h \\
S_{k3} &= \left[-I + (e^{A_k h} - I) A_k^{-1} \right] A_k^{-1} / h
\end{aligned} \tag{3-47}$$

この式において状態遷移行列 $e^{A_k h}$ に2次のPade近似を用いる.

$$e^{A_k h} = (I - A_k h / 2)^{-1} (I + A_k h / 2) \tag{3-48}$$

(3-47), (3-48) 式を (3-46) 式に代入すると, 次式のようになる.

$$\begin{aligned}
x_k &= (I - A_k h / 2)^{-1} (I + A_k h / 2) x_{k-1} + (h / 2) (I - A_k h / 2)^{-1} (B_{k-1} u_{k-1} + D_{k-1} r_{k-1}) \\
&\quad + (h / 2) (I - A_k h / 2)^{-1} (B_k u_k + D_k r_k)
\end{aligned} \tag{3-49}$$

3. 4. 2 瞬時最適化制御則 (制御則 I)

瞬時最適化制御則は, t 時刻における状態変数ベクトル $x(t)$ および制御力 $u(t)$ により構成され, エネルギー指標

$$J(t) = x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \tag{3-50}$$

を最小にするものである. 最適レギュレータ理論における (3-36) 式で示された評価関数は, 時間的に固定されているが, 瞬時最適化理論では, 評価関数が時間的に変化する記述となっており時変系に適した制御則になっている.

システムの離散化方程式が (3-46) 式で表現できる場合, これを次式のように変形する.

$$x_k = T(k-1) + S_{k3} (B_k u_k + D_k r_k) \tag{3-51}$$

$$T(k-1) = S_{k1} x_{k-1} + S_{k2} (B_{k-1} u_{k-1} + D_{k-1} r_{k-1}) \tag{3-52}$$

(3-51), (3-52) 式の基に, (3-50) 式を最小化する. これは, Lagrangeの未定係数法により実現できる. Lagrangeの未定係数法に用いるHamilton関数は, 次式で構成される.

$$L(k) = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \lambda_k^T [x_k - T(k-1) - S_{k3} (B_k u_k + D_k r_k)] \tag{3-53}$$

ここで, λ_k は未定係数ベクトルである.

評価関数の極小値を得るために, 上式を x_k , u_k および λ_k で偏微分し

て，次の Euler の方程式を得る．

$$\frac{\partial L(k)}{\partial x_k} = 2Qx_k + \lambda_k = 0 \quad (3-54)$$

$$\frac{\partial L(k)}{\partial u_k} = 2Ru_k - B_k^T S_{k3}^T \lambda_k = 0 \quad (3-55)$$

$$\frac{\partial L(k)}{\partial \lambda_k} = x_k - T(k-1) - S_{k3}(B_k u_k + D_k r_k) = 0 \quad (3-56)$$

瞬時最適化制御則では，制御力の記述の相違により，フィードフォワード制御，フィードバック制御または，フィードフォワードとフィードバックの併合による制御のいずれかが実現可能である．これらは，Lagrange の未定係数 λ_k を次式のように仮定することで表現できる．

$$\lambda_k = Ax_k + \chi_k \quad (3-57)$$

ここで， A は構造物の自由度数 n の 2 倍 ($2n$) の次元をもつ正方行列， χ_k は ($2n$) 次元のベクトルである．

フィードバック制御では，(3-57) 式を次式のようにおく．

$$\lambda_k = Ax_k \quad (3-58)$$

これを (3-54) 式に代入することにより，

$$A = -2Q \quad (3-59)$$

が得られる．次に，(3-55) 式に (3-58)，(3-59) 式を代入することにより，制御力が，

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2} R^{-1} B_k^T S_{k3}^T (-2Q) x_k \\ &= -R^{-1} B_k^T S_{k3}^T Q x_k \end{aligned} \quad (3-60)$$

のように導かれる．最適レギュレータ理論では，(3-39)，

(3-41) 式のリカッチ方程式を解くことにより制御力を求めているが，瞬時最適化制御則ではこのような処理が必要ではない．この点においても，瞬時最適化制御則が有利である．

次に，(3-60) 式の制御力 u_k を，(3-51)，(3-52) 式に代入し整理することで，システムの方程式が次のように得られる．

$$x_k = (I + S_{k3} B_k R^{-1} B_k^T S_{k3}^T Q) \{T(k-1) + S_{k3} D_k r_k\} \quad (3-61)$$

3. 4. 3 瞬時最適化制御則（制御則Ⅱ）

時変系振動により適した制御則を設計するため，（3-50）式で示した評価関数 $J(t)$ を $t_k \leq t \leq t_{k+2}$ 区間に拡張する．このとき， $J(k)$ は，応答 x_k, x_{k+1}, x_{k+2} および，制御力 u_k, u_{k+1}, u_{k+2} より構成される．

$$J(k) = x_{k+2}^T Q_1 x_{k+2} + x_{k+1}^T Q_2 x_{k+1} + x_k^T Q_3 x_k + u_{k+2}^T R_1 u_{k+2} + u_{k+1}^T R_2 u_{k+1} + u_k^T R_3 u_k \quad (3-62)$$

ここで，Lagrangeの未定係数法を用いる．（3-62）式に対応するHamilton関数は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L(k+2, k+1, k) = & x_{k+2}^T Q_1 x_{k+2} + x_{k+1}^T Q_2 x_{k+1} + x_k^T Q_3 x_k + u_{k+2}^T R_1 u_{k+2} + u_{k+1}^T R_2 u_{k+1} + u_k^T R_3 u_k \\ & + \lambda_{k+2}^T [x_{k+2} - S_{k+23}(B_{k+2}u_{k+2} + D_{k+2}r_{k+2}) - T(k+1)] \\ & + \lambda_{k+1}^T [x_{k+1} - S_{k+13}(B_{k+1}u_{k+1} + D_{k+1}r_{k+1}) - T(k)] \\ & + \lambda_k^T [x_k - S_{k3}(B_k u_k + D_k r_k) - T(k-1)] \end{aligned} \quad (3-63)$$

ここで， $S_{k+i\alpha}$ ($\alpha=1,2,3$) は， $t=t_{k+i}$ 時刻における $S_{k\alpha}$ の値である．

Hamilton関数を u_{k+2}, u_{k+1}, u_k で偏微分し，次のEulerの方程式を得る．

$$\frac{\partial L}{\partial u_{k+2}} = 2Ru_{k+2} - (S_{k+23}B_{k+2})^T \lambda_{k+2} = 0 \quad (3-64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{k+1}} = 2Ru_{k+1} - (S_{k+23}B_{k+1})^T \lambda_{k+2} - (S_{k+13}B_{k+1})^T \lambda_{k+1} = 0 \quad (3-65)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = 2Ru_k - (S_{k+12}B_k)^T \lambda_{k+1} - (S_{k3}B_k)^T \lambda_k = 0 \quad (3-66)$$

ここで， $Q_1=Q_2=Q_3=Q$ とし，（3-58），（3-59）式および，上記の3式より，次の制御力が得られる．

$$u_{k+2} = -R^{-1}(S_{1k+23}B_{1k+2})^T Qx_{k+2} \quad (3-67)$$

$$u_{k+1} = -R^{-1} \left[\left\{ (S_{1k+22}B_{1k+1})^T + (S_{1k+13}B_{1k+1})^T S_{1k+21}^T \right\} Qx_{k+2} + (S_{1k+13}B_{1k+1})^T Qx_{k+1} \right] \quad (3-68)$$

$$u_k = -R^{-1} \left[\left\{ (S_{1k+12}B_{1k})^T + (S_{1k3}B_{1k})^T S_{1k+11}^T \right\} \{ S_{1k+21}^T Qx_{k+2} + Qx_{k+1} \} + (S_{1k3}B_{1k})^T Qx_k \right] \quad (3-69)$$

この制御力では， x_k の1ステップ先および2ステップ先の予測値 x_{k+1}, x_{k+2} が必要になる． x_{k+1}, x_{k+2} の予測値の近似として，（3-46）式より，車両からの外力を除いた

$$x_{k+1} = S_{1k+11}x_k + S_{1k+12}B_{1k}u_k \quad (3-70)$$

$$x_{k+2} = S_{lk+2l}x_{k+l} + S_{lk+22}B_{lk+l}u_{k+l} = S_{lk+2l}(S_{lk+l}x_k + S_{lk+l2}B_{lk}u_k) + S_{lk+22}B_{lk+l}u_{k+l} \quad (3-71)$$

を採用する．これらを (3-68) 式に代入し u_{k+l} を求め，さらに

(3-70)，(3-71) 式と求めた u_{k+l} を (3-69) 式に代入すること
で，次の瞬時最適化制御則 II における制御力が得られる．

$$\begin{cases} u_k = -K_k x_k \\ K_k = (I + H_k S_{lk+12} B_{lk})^{-1} [H_k S_{lk+1l} + R^{-1} (S_{lk3} B_{lk})^T Q] \end{cases} \quad (3-72)$$

ここで， H_k は時変係数であり，次式で与えられる．

$$\begin{cases} H_k = R^{-1} \left\{ (S_{lk+12} B_{lk})^T + (S_{lk3} B_{lk})^T S_{lk+1l}^T \right\} \\ \quad \left\{ S_{lk+2l}^T Q (S_{lk+2l} - S_{lk+22} B_{lk+l} [I + J_k S_{lk+22} B_{lk+l}]^{-1} [J_k S_{lk+2l} + R^{-1} (S_{lk+13} B_{lk+l})^T Q]) + Q \right\} \\ J_k = R^{-1} \left\{ (S_{lk+22} B_{lk+l})^T + (S_{lk+13} B_{lk+l})^T S_{lk+2l}^T \right\} Q \end{cases} \quad (3-73)$$

3. 4. 3 多段階型瞬時最適化制御則

本研究では，さらに時変系振動に対応させるため，瞬時最適化制御則を一般化した多段階型瞬時最適化制御則を求める．(3-50) 式の評価関数を， $t_k \leq t \leq t_{k+n}$ 区間に拡張する．応答 x_k, \dots, x_{k+n} および制御力 u_k, \dots, u_{k+n} により構成される評価関数は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} J(k) &= x_{k+n}^T Q_l x_{k+n} + x_{k+n-l}^T Q_2 x_{k+n-l} + \dots + x_k^T Q_{n+l} x_k + u_{k+n}^T R_l u_{k+n} + u_{k+n-l}^T R_2 u_{k+n-l} + \dots + u_k^T R_{n+l} u_k \\ &= \sum_{i=0}^n \{ x_{k+i}^T Q_{l+i} x_{k+i} + u_{k+i}^T R_{l+i} u_{k+i} \} \end{aligned} \quad (3-74)$$

ここで， n 段階制御則の誘導に Lagrange の未定係数法を用いる．この場合の Hamilton 関数は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L(k+n, k+(n-l), \dots, k) &= x_{k+n}^T Q_l x_{k+n} + \dots + x_k^T Q_{n+l} x_k + u_{k+n}^T R_l u_{k+n} + \dots + u_k^T R_{n+l} u_k \\ &\quad + \lambda_{k+n}^T [x_{k+n} - S_{lk+n3} (B_{lk+n} u_{k+n} + D_{lk+n} r_{k+n}) - T(k+n-l)] \\ &\quad + \lambda_{k+n-l}^T [x_{k+n-l} - S_{lk+n-l3} (B_{lk+n-l} u_{k+n-l} + D_{lk+n-l} r_{k+n-l}) - T(k+n-2)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \lambda_k^T [x_k - S_{lk3} (B_{lk} u_k + D_{lk} r_k) - T(k-l)] \end{aligned} \quad (3-75)$$

ここで $S_{lk+\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) は， $t = t_{k+i}$ 時における $S_{lk\alpha}$ の値である．

(3-75) 式を u_{k+n}, \dots, u_k で微分することにより，次の Euler の方程式

を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial u_{k+n}} = 2Ru_{k+n} - (S_{Ik+n3}B_{Ik+n})^T \lambda_{k+n} = 0 \quad (3-76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{k+n-1}} = 2Ru_{k+n-1} - (S_{Ik+n3}B_{Ik+n-1})^T \lambda_{k+n} - (S_{Ik+n-13}B_{Ik+n-1})^T \lambda_{k+n-1} = 0 \quad (3-77)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = 2Ru_k - (S_{Ik+12}B_{Ik})^T \lambda_{k+1} - (S_{Ik3}B_{Ik})^T \lambda_k = 0 \quad (3-78)$$

これらの3式より，次の制御力が得られる。

$$u_k = -R^{-1} \left[\left\{ (S_{Ik+12}B_{Ik})^T + (S_{Ik3}B_{Ik})^T S_{Ik+11}^T \right\} \right. \\ \left. \left\{ (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+n1}^T) Q x_{k+n} + (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+(n-1)1}^T) Q x_{k+(n-1)} + \cdots \right. \right. \\ \left. \left. + S_{Ik+21}^T Q x_{k+2} + Q x_{k+1} \right\} + (S_{Ik3}B_{Ik})^T Q x_k \right] \quad (3-79)$$

この制御力は， x_k の1ステップ先から n ステップ先の予測値 x_{k+1}, \dots, x_{k+n} が必要になる。(3-46)式より， x_{k+1}, \dots, x_{k+n} の予測値の近似として次式を用いる。

$$x_{k+1} = S_{Ik+11}x_k + S_{Ik+12}B_{Ik}u_k \quad (3-80)$$

$$x_{k+2} = S_{Ik+21}x_{k+1} = S_{Ik+21}(S_{Ik+11}x_k + S_{Ik+12}B_{Ik}u_k) = S_{Ik+21}S_{Ik+11}x_k + S_{Ik+21}S_{Ik+12}B_{Ik}u_k \quad (3-81)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+n} = (S_{Ik+n1} \cdots S_{Ik+11})x_k + (S_{Ik+n1} \cdots S_{Ik+12})(S_{Ik+12}B_{Ik})^T u_k \quad (3-82)$$

ここで， $u_{k+1}, \dots, u_{k+(n-1)}$ は求めることができないので，これらの変数を用いないと仮定している。

(3-80)，(3-81)，(3-82)式を(3-79)式に代入すると， n 区間における瞬時最適化制御則での制御力が得られる。

$$\begin{cases} u_k = -K_k x_k \\ K_k = R^{-1} F_k G_k \left[\left\{ (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+n1}^T) Q (S_{Ik+n1} \cdots S_{Ik+21}) + (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+n-11}^T) Q (S_{Ik+n-11} \cdots S_{Ik+11}) + \cdots \right. \right. \\ \left. \left. + S_{Ik+21}^T Q S_{Ik+21} S_{Ik+11} + Q S_{Ik+11} \right\} + (S_{Ik3}B_{Ik})^T Q \right] \end{cases} \quad (3-83)$$

ここで F_k ， G_k は次式で表現される時変係数である。

$$\begin{cases} G_k = (S_{Ik+12}B_{Ik})^T + (S_{Ik3}B_{Ik})^T S_{Ik+11}^T \\ F_k = I + R^{-1} G_k \left[\left\{ (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+n1}^T) Q (S_{Ik+n1} \cdots S_{Ik+21}) \right. \right. \\ \left. \left. + (S_{Ik+21}^T \cdots S_{Ik+n-11}^T) Q (S_{Ik+n-11} \cdots S_{Ik+21}) + \cdots + S_{Ik+21}^T Q S_{Ik+21} + Q \right\} S_{Ik+12}B_{Ik} \right] \end{cases} \quad (3-84)$$

3. 5 スライディングモード理論

(3-5) 式に対しこの理論の特徴である制御入力の切り換えを行う際の条件を与える切換関数 σ は、次式のように与えられる。

$$\sigma = Sx \quad (3-85)$$

この式のベクトル S を決定することで、各振動次数の切換超平面の傾きが設計できる。これには、極配置法、 H^2 理論、 H^∞ 理論、 μ シンセシス等、いくつかの方法^{15) 21)} が検討されているが、本研究では、定常リカッチ方程式による S の決定法を採用する。

(3-41) 式の定常リカッチ方程式の正定解 P より、ベクトル S は次式のように求められる。

$$S = B^T P \quad (3-86)$$

次に、橋梁の変位応答を切換超平面に到達させ、この交線上でスライドさせる滑り状態を実現するための条件を考える。この方法にもいくつかの方法¹⁵⁾ が提案されているが、有限時間において応答を切換超平面に到達させることを目的とし、切換関数 σ に対する Lyapunov 関数 V を定義し、これより求められる微分値 \dot{V} を負とする方法を採用する。

σ に対する Lyapunov 関数 V は、

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (3-87)$$

で与えられ、状態フィードバックの制御入力を $-Kx$ とし、(3-5) 式から外力の項を除いた状態方程式を用いると、スライディングモード理論における滑り状態の実現条件は、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma \dot{\sigma} \\ &= \sigma S \dot{x} \\ &= \sigma S(Ax + Bu) \\ &= \sigma SAx - \sigma SBKx < 0 \end{aligned} \quad (3-88)$$

となる。この式より、フィードバックゲインベクトル K の各要素は次のように二つの値で切り換え、変動させることになる。

$$k_j = \begin{cases} k_j^+ > (SB)^{-1}(SA)_j & \alpha x_j > 0 \\ k_j^- < (SB)^{-1}(SA)_j & \alpha x_j < 0 \end{cases} \quad (j=1, \dots, 2r+4) \quad (3-89)$$

ここで， SB はスカラー， SA は $1 \times (2r+4)$ ベクトルとなり， $(SA)_j$ は (SA) の j 列の成分を表す。

一般的なスライディングモード理論では，非線形性を有する制御入力が，無限大の切換周波数を持つことになり，チャタリングとよばれる高周波振動を引き起こす。アクチュエータの性能上このような力を発生させることは，事実上，不可能である。この防止方法に関しても，いくつかの提案^{12) 15) 22) 23) 24)} がなされているが，本研究では，制御入力の切り換えを連続化するため (3-89) 式を以下のように書き替える。

$$k_j = \begin{cases} k_j^+ & \alpha x_j > \varepsilon \\ k_j^- & \alpha x_j < -\varepsilon \\ (k_j^+ - k_j^-)\alpha x_j / 2\varepsilon + (k_j^+ + k_j^-)/2 & -\varepsilon < \alpha x_j < \varepsilon \end{cases} \quad (3-90)$$

3. 6 まとめ

本章では，対象とする橋梁系の状態方程式およびハイブリッド振動制御を行う場合の各種制御理論の定式化を行った。得られた結果をまとめると，次のようになる。

(1) 状態フィードバックを行う際，必要となる状態方程式を，第2章で示した各橋梁モデルについて誘導した。

(2) 非定常性を考慮した非定常最適レギュレータ理論の定式化を行った。本研究で用いた制御理論による振動制御効果の比較検討のため，これまで土木構造物に適用されてきた定常最適レギュレータ理論の定式化を行った。

(3) 橋梁-動吸振器-車両系の運動方程式の離散表示を行い，時変系の制御が可能である瞬時最適化理論を適用した場合の定式化を行った。さらに時変系の特性に対応させるため，これを拡張した多段階

制御理論を提案した．

(4) 橋梁-車両系で問題となるパラメータ変動を伴う時変系に対し，優れたロバスト性を持つスライディングモード理論を橋梁-動吸振器-車両系に適用した．このとき，スライディングモード理論の最大の弱点とされているチャタリングを防止する手法を検討した．

参考文献

- 1) 矢作 枢・吉田和彦：高架橋における交通振動のアクティブコントロール, 土木学会論文集, No.356/ I -3, pp.435-444, 1985.4.
- 2) M.Abdel-Roman and H.H.E.Leipholz: Active Control of Flexible Structures, J. of the Structural Division, ASCE, Vol.104, No.ST8, pp.1251-1266, 1978.7.
- 3) 川谷 充朗・山田 靖則・下野 正人・清木 計成・森 淳彦：桁橋の交通振動に対するハイブリッド制御の模型実験, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.683-690, 1995.3.
- 4) 藤野 陽三・ヒノド K. バルティア・笠原 覚：高架橋の交通振動に対するアクティブ制御, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.677-81, 1995.3.
- 5) J.N.Yang, A.Akbarpour and P.Ghaemmaghami: New Optimal Control Algorithms for Structural Control, ASCE, Vol.113, No.9, pp.1369-1386, 1987.9.
- 6) 岡林 隆敏・加賀 敏明・吉村 徹・尾口 慎也：単一車両が走行する道路橋の確率的制御理論による振動制御, 土木学会論文集, 1998.4.
- 7) 白石 昌武：入門現代制御理論, 啓学出版, 1987.11.
- 8) P.Dorato, C.Abdallah and V.Cerone: Linear-Quadratic Control, Prentice-Hall, Inc., 1995.
- 9) 小堀 鐸二：制震構造－理論と実際－, 鹿島出版会, 1993.9.
- 10) D.G.Schultz and J.L.Melsa (久村 富持 訳)：状態関数と線形制御系, 学献社, 1970.4.
- 11) 小郷 寛・美多 勉：システム制御理論入門, 実教出版, 1979.12.
- 12) 山口 宏樹・増田 高志・伊藤 重木：橋桁・車両連成振動系の動特性とそのロバスト制御に関する基礎研究, 第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, No.95-28, pp.271-274, 1995.7.
- 13) 岡林 隆敏・尾口 慎也・加賀 敏明：各種フィードバック制御則による道路橋交通振動のアクティブ制御, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.731-738, 1996.4.

- 14) 石井慎一・野波健蔵・西村秀和・中田修：ハイブリッド動吸振器を用いた搭状構造物のスライディングモード制御, 第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, No.95-28, pp.418-423, 1995.7.
- 15) 野波建蔵・田宏奇：スライディングモード制御, コロナ社, 1994.10.
- 16) 加賀敏明・岡林隆敏：スライディングモード理論による道路橋交通振動のアクティブ制御, 土木構造・材料論文集, 第13号, pp.49-57, 1997.12.
- 17) 岡林隆敏・加賀敏明：スライディングモード理論による道路橋交通振動の制御, 長崎大学工学部研究報告, Vol.26, No.47, pp.279-286, 1996.7.
- 18) 加賀敏明・岡林隆敏：単一走行車両による道路橋振動のスライディングモード制御, 応用力学連合講演会, 講演予稿集, pp.31-32, 1996.12.
- 19) 岡林隆敏・尾口慎也・加賀敏明：時変フィードバック則による道路橋交通振動のアクティブ制御, 第3回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B, pp.33-40, 1995.8.
- 20) D.MTrujillo：The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations Using Pade Approximations, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.9, pp.259-270, 1975.
- 21) 岩本浩祐・伊藤貴之・野波健蔵・西村秀和： μ 設計理論で周波数成形されたスライディングモード制御による柔構造物のアクティブ制御, 第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, No.95-28, pp.120-123, 1995.7.
- 22) 坂本憲昭・増淵正美・川田誠一：不確かさを含む線形動的システムのロバスト制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.28, No.3, pp.351-357, 1992.3.
- 23) 徳永慎一・高木哲也・阿部直人・嘉納秀明：パルスの推進力による振動制御, 第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, 日本機械学会, No.95-28, pp.116-119, 1995.7.
- 24) 北村康弘・岩淵一徳・野波健蔵・西村秀和・小林信之：フレキシブルロボットアームのスライディングモードサーボ位置決め制御, 第4回「運

動と振動の制御」シンポジウム講演論文集，日本機械学会，No.95-28,pp.194-197,1995.7.

第 4 章 状態推定理論と確率的制御理論の定式化

4. 1 はじめに

橋梁の振動制御をアクティブ制御で行う場合，一般に，状態フィードバックが適用される．状態フィードバックとは，制御対象の状態量をすべて求め，その状態量から制御入力を算出し，振動を抑制する制御方法である．交通荷重による道路橋振動において，橋梁と車両は連成振動を行っている．道路橋交通振動による，状態フィードバック制御を実現するためには，特に橋梁に設置した検出器（加速度計）の信号から直接計測できない車両の状態量を推定する必要がある．ある構造物の状態量が計測できない場合，観測値からこれを推定する機構にオブザーバー¹⁾がある．しかし，制御対象が雑音によって乱されるような場合の状態推定に対しては，カルマンフィルタ^{2) 3) 4)}が有効になる．カルマンフィルタは，システムに混在する雑音の性質を確率的に取り扱って，状態推定を行う推定機構である．

本研究では，橋梁の振動制御に動吸振器をアクチュエータで駆動するハイブリッド制御を適用する．そのために，橋梁-動吸振器-車両系の全状態を推定する必要がある．そこで，本章では，推定機構として，カルマンフィルタを適用した場合の定式化^{5) 6) 7) 8)}を行う．さらに，橋梁-車両系の振動制御に有利な時変系制御に対応させるために，離散化された状態量を推定する離散系カルマンフィルタ⁹⁾の定式化を行う．このため，カルマンフィルタの構成に必要な確率的微分方程式について，路面凹凸を定常確立過程でモデル化することにより誘導する．

最適制御理論は，確定系に対する状態フィードバック制御（Linear Quadratic Control）と確率系に対する確率的制御理論（Linear Quadratic Gaussian Control）^{2) 10) 11) 12)}に分けられる．確定系に対しては，オブザー

バー理論が適用され，確率系に対しては，カルマンフィルタが適用される．本章では，橋梁-車両系の振動制御則に確率的制御理論（LQG制御）を適用する．最適レギュレータ理論に連続系カルマンフィルタを適用した場合と，瞬時最適化理論に分散系カルマンフィルタを適用した場合について定式化を行う．

また，規則的な外力に対してはオブザーバーの適用が現実的である．そこで，歩行者による吊床版歩道橋振動に対して，全次元のオブザーバー理論による状態推定を考える．さらに，この推定機構を制御則に組み込んだ場合の定式化を行う．

4. 2 走行車両による道路橋振動へのカルマンフィルタの適用

4. 2. 1 カルマンフィルタの構造

制御対象が雑音によって乱される場合の状態推定にはカルマンフィルタを適用する．動吸振器を設置する道路橋振動のハイブリッド制御を考える場合，制御系は橋梁-動吸振器-車両系で構成される．路面凹凸を白色雑音で表現する確率微分方程式でモデル化することにより，路面凹凸の状態変数を含む橋梁-動吸振器-車両-路面系の方程式が求められる．この方程式からカルマンフィルタを構成することができる．カルマンフィルタは，その方程式の記述のしかたにより，連続系カルマンフィルタと分散系カルマンフィルタに分類できる．制御理論の方程式の記述に合わせてどちらかを選択することになる．橋梁を梁モデルとした場合の状態推定について，連続系カルマンフィルタによる場合を図4.1，分散系カルマンフィルタによる場合を図4.2に示す．

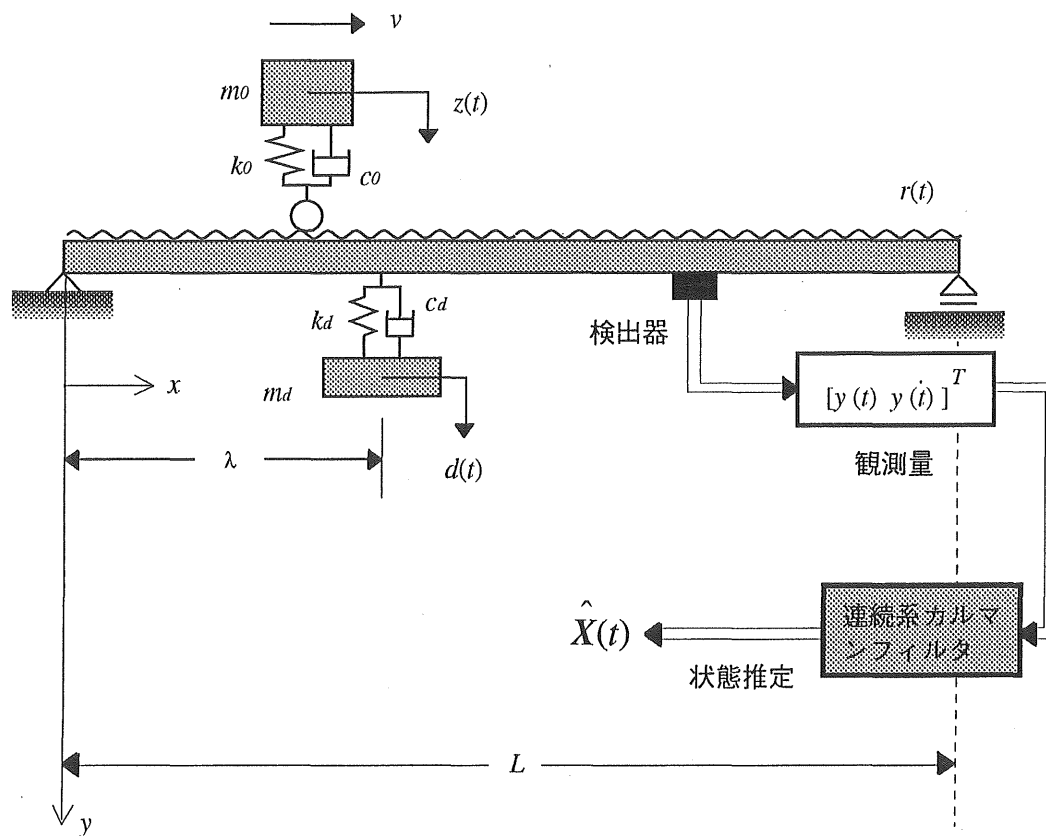


図 4.1 連続系カルマンフィルタによる状態推定

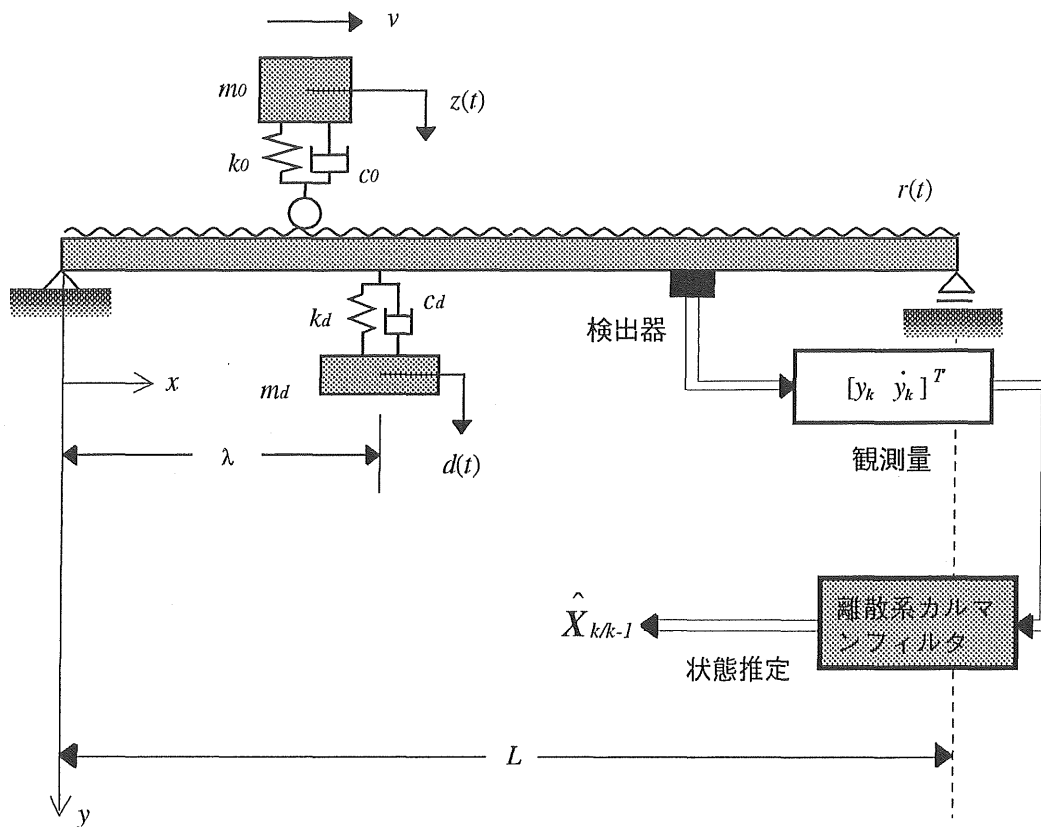


図 4.2 離散系カルマンフィルタによる状態推定

4. 2. 2 橋梁 - 動吸振器 - 車両系の確率微分方程式による表現

(1) 路面凹凸のモデル化

道路橋振動におけるハイブリッド制御のためのカルマンフィルタを構成するには，路面凹凸を定常確立過程でモデル化し，橋梁-動吸振器-車両系を確率的微分方程式で定式化する必要がある．

そこで，まず，路面凹凸を実測のパワースペクトル密度より正規確率過程でモデル化¹³⁾する．路面凹凸の実測のパワースペクトル密度に，パワースペクトル密度の理論式を曲線適合することが可能で

ある。従来，路面凹凸のパワースペクトル密度は，単位長さ当たりの凹凸数 $\Omega(\text{cycle}/m)$ の Ω^{-2} に近似的に比例するものとして研究されてきたが，本研究では，確率過程の分散が有限になるようにするため，パラメータ a を加えて，路面凹凸のパワースペクトル密度を次式で近似する。

$$S_r(\Omega) = \frac{A}{\Omega^2 + a^2} \quad (4-1)$$

ここで， A は路面凹凸の良否を表す定数， a は曲線適合のための定数であり，曲線適合されたパワースペクトル密度のスペクトル形状を表す。河合・森崎¹⁴⁾により測定された「名神高速道路野州川橋下り線」のパワースペクトル密度を，(4-1)式で近似したものを図4.3に示す。このパワースペクトル密度に，(4-1)式を曲線適合すると，係数 A および a は， $1.0 \times 10^{-3}(\text{cm}^2/\text{cycle}/m)$ と $0.05(1/m)$ になる。

路面凹凸は，橋梁上の位置 x の関数 $r(x)$ であるが，車両上でこれを観測する場合， $x=vt$ の変換により，時間の関数 $r(t)$ として考えることができる。時間関数 $r(t)$ で考えたパワースペクトル密度は，次式で与えられる。

$$S_r(\omega) = \frac{S_0}{\omega^2 + \beta^2} \quad (4-2)$$

ここで， $S_0 = 2\pi v A$ ， $\beta = 2\pi v a$ である。

このパワースペクトル密度を有する路面凹凸は，次のように，白色雑音 $n(t)$ を入力とする1階の微分方程式の定常解過程でモデル化することができる。

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = n(t) \quad (4-3)$$

$n(t)$ は S_0 のパワースペクトル密度を有する正規性白色雑音過程であり，次のような確率特性を有する。

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t_1)n(t_2)^T] &= \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (4-4)$$

ここで， $E[\]$ は数学的平均値の演算子である。 σ^2 は白色雑音の強度

であり， $\sigma^2 = 2\pi S_0$ で与えられる． また， $\delta(t_1 - t_2)$ は Dirac のデルタ関数である．

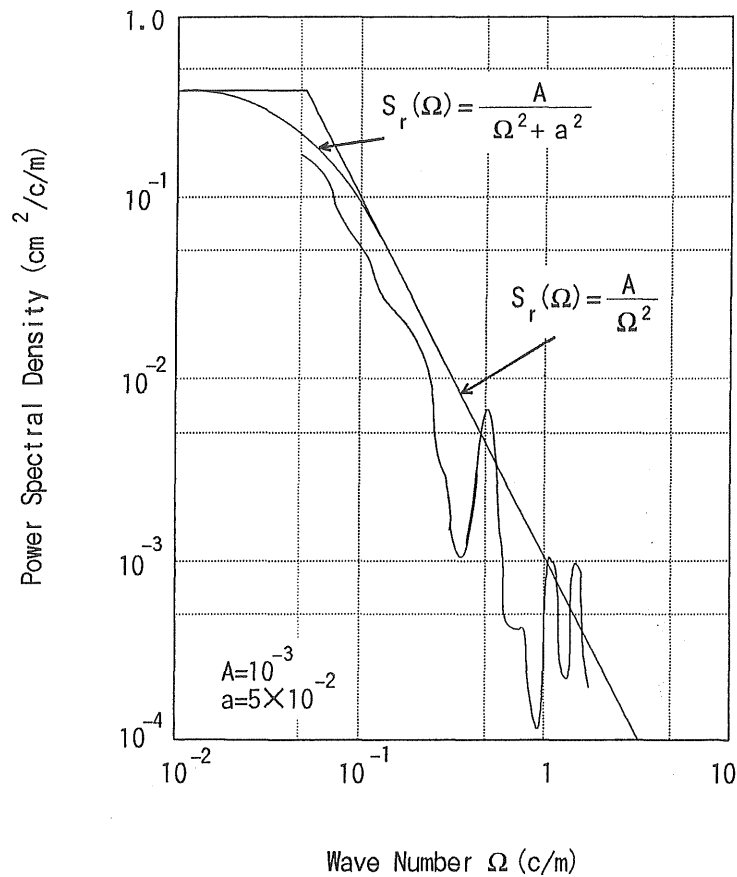


図 4.3 路面凹凸のパワースペクトル密度

(2) 確率微分方程式

プレートガーダー橋の梁モデルと有限帯板モデルおよび，トラスドランガー橋モデルの橋梁-動吸振器-車両系の状態方程式は，第3章で示したように同じ方程式で記述できる．

(4-3) 式でモデル化した路面凹凸 $r(t)$ を用いて，橋梁-動吸振器-車両-路面系の状態変数ベクトルを次のように定義する．

$$X_B(t) = [q(t)^T \dot{q}(t)^T d(t) \dot{d}(t)]^T \quad (4-5)$$

$$X_V(t) = [z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \quad (4-6)$$

$$X(t) = [X_B(t)^T X_V(t)^T]^T \quad (4-7)$$

(4-7) 式の状態変数ベクトルと (4-3) 式でモデル化した路面凹凸の方程式を用いると、橋梁-動吸振器-車両系は、次のような白色雑音 $n(t)$ を入力とする確率微分方程式で表現できる。

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_r(t)X(t) + D_r(t)n(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (4-8)$$

ここで、 $A_r(t)$ は $\{(2r+5) \times (2r+5)\}$ マトリックスであり、 $A(t)$ を拡大した拡大系の係数マトリックスである。 $D_r(t)$ は $(2r+5)$ 次元ベクトルである。

$A_r(t)$, $D_r(t)$ は、それぞれ以下に示すような要素で構成される。

$$A_r(t) = \begin{bmatrix} A_B(t) & \bar{A}_{BV}(t) \\ \bar{A}_{VB}(t) & \bar{A}_V(t) \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

$$D_r(t) = [D_B(t)^T \bar{D}_V(t)^T]^T \quad (4-10)$$

$\bar{A}_{BV}(t)$, $\bar{A}_{VB}(t)$, $\bar{A}_V(t)$ は、 $(2r \times 5)$, $(5 \times 2r)$, (5×5) マトリックスであり、それぞれ次のように表される。

$$\bar{A}_{BV}(t) = \begin{bmatrix} \vdots & 0_* \\ A_{BV}(t) & \vdots \\ \vdots & a_{27} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

$$\bar{A}_{VB}(t) = \begin{bmatrix} A_{VB}(t) & \vdots \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$\bar{A}_V(t) = \begin{bmatrix} \vdots & 0 \\ A_V(t) & \vdots \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{77} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

$D_B(t)$, $\bar{D}_V(t)$ は、それぞれ $(2r \times 1)$, (5×1) ベクトルであり、次のように表される。

$$D_B(t) = [0_1 \ d_2]^T, \quad \bar{D}_V(t) = [0 \ 0 \ 0 \ d_6 \ d_7]^T \quad (4-14)$$

1) プレートガーダー橋の梁モデル

a_{27} , a_{67} , a_{77} および d_2 , d_6 , d_7 は、それぞれ次のようになる。

$$a_{27} = (2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2)\mu_{kv}\Phi(vt)^T, \quad a_{67} = -(2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2), \quad a_{77} = -\beta$$

$$d_2 = -2h_0\omega_0\mu_{kv}\Phi(vt) \quad , \quad d_6 = 2h_0\omega_0 \quad , \quad d_7 = 1$$

2) プレートガーダー橋の有限帯板モデル

a_{27} , a_{67} , a_{77} および d_2 , d_6 , d_7 は, それぞれ次のようになる.

$$a_{27} = (2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2)m_0L^{-1}Z^{jT}S(a,vt)^T \quad , \quad a_{67} = -(2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2) \quad , \quad a_{77} = -\beta$$

$$d_2 = -2h_0\omega_0m_0L^{-1}Z^{jT}S(a,vt)^T \quad , \quad d_6 = 2h_0\omega_0 \quad , \quad d_7 = 1$$

3) トラスドランガー橋モデル

a_{27} , a_{67} , a_{77} および d_2 , d_6 , d_7 は, それぞれ次のようになる.

$$a_{27} = (2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2)m_0L^{-1}\Phi(vt)^T \quad , \quad a_{67} = -(2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2) \quad , \quad a_{77} = -\beta$$

$$d_2, d_6, d_{72} = -2h_0\omega_0m_0L^{-1}\Phi(vt)^T \quad , \quad d_6 = 2h_0\omega_0 \quad , \quad d_7 = 1$$

次に, 連続系の (4-8) 式を, $\Delta t = h$ の時間刻みで離散表示することを考える. このときの $X(t=t_k) = X_k$ の値は, 第3章の (3-5) 式を (3-46) 式に離散化したときと同様に, 離散系確率微分方程式は次のようになる.

$$X_k = S_{rk1}X_{k-1} + S_{rk2}n_{k-1} + S_{rk3}n_k \quad (4-15)$$

ここで, S_{rk1} , S_{rk2} および S_{rk3} は (3-47) 式に示したものを橋梁-動吸振器-車両-路面系に拡大したものである.

4. 2. 3 連続カルマンフィルタの定式化

状態フィードバックによるハイブリッド制御を実現するためには, 橋梁-動吸振器-車両系の状態変数を推定する必要がある. 本研究では橋梁上に設置した1個の検出器により, 橋梁の基準座標による状態変数, 車両と動吸振器および路面の状態変数を推定することを試みる.

最適レギュレータ理論は, 連続系の方程式により記述される. この理論により, 状態フィードバック制御を行うとき, 連続系の状態変数 $x(t)$ を推定する必要がある. これを連続系カルマンフィルタによ

り状態推定する．カルマンフィルタの計算に用いるリカッチ方程式の時間的変化の有無を考え，非定常カルマンフィルタと定常カルマンフィルタの定式化を行う．

橋梁上における任意の点の変位と速度を求める場合，観測量は一般に次のように表される．

$$Y_0(t) = \begin{bmatrix} T & 0_2 \\ 0_2 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t)^T \\ \dot{q}(t)^T \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

ここで， T は，それぞれプレートガーダー橋の梁モデルと有限帯板モデルおよび，トラスドランガー橋モデルの場合において，次のように表される．

1) プレートガーダー橋の梁モデル

$$T = \Phi(x) \quad (4-17)$$

2) プレートガーダー橋の有限帯板モデル

$$T = S(x, y) Z^T \quad (4-18)$$

3) トラスドランガー橋モデル

$$T = \Phi(x) \quad (4-19)$$

(4-16) 式の観測量は，

$$Y_0(t) = C_r X_r(t) \quad (4-20)$$

で記述することができる．

カルマンフィルタを構成するための，橋梁-動吸振器-車両-路面系の方程式は，(4-8)式で示された．この式に対する，カルマンフィルタによる推定機構⁸⁾は，次式で与えられる．

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A_r(t) \hat{X}(t) + G(t) [Y(t) - C_r \hat{X}(t)] \\ \hat{X}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4-21)$$

ここで， $\hat{X}(t)$ は推定状態変数ベクトル， $Y(t)$ は観測量， $G(t)$ はカルマンフィルタのフィードバックゲインでありカルマンゲインと呼ばれるものである．また， C_r は(4-20)式の係数マトリックスであり観測マトリックスと呼ばれるものであるが，カルマンフィルタ機構を構成するためには，(4-20)式の代わりに観測雑音を付加した観測

方程式が必要になる。

$$Y(t) = C_r X(t) + v(t) \quad (4-22)$$

ここで、 $v(t)$ は、正規性の白色雑音ベクトルである。その確率特性は、平均値がゼロで、自己相関関数は次式で与えられる。

$$E[v(t_1)v(t_2)^T] = \Sigma_v \delta(t_1 - t_2) \quad (4-23)$$

ここで、 Σ_v は観測雑音の強度マトリックスである。

カルマンフィルタは、雑音を受けるシステム (4-8) , (4-22) 式に対して、観測値 $Y(t)$ から全ての状態変数 $X(t)$ の最良推定値 $\hat{X}(t)$ を求める推定機構である。制御力がある場合でも、分離定理^{10) 11)}によりカルマンフィルタを構成できる。

カルマンフィルタでは、次の二乗平均誤差による評価関数を最小にするようにカルマンゲイン $G(t)$ が求められる。

$$J = E\left\{\left[X(t) - \hat{X}(t)\right]^T \left[X(t) - \hat{X}(t)\right]\right\} \quad (4-24)$$

これを最小にするものとして、(4-21) 式におけるカルマンゲインは、次式で与えられる。

$$G(t) = S(t)C_r^T \Sigma_v^{-1} \quad (4-25)$$

ここで、 $S(t)$ は次のリカッチ方程式の正定対称な解である。

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A_r(t)S(t) + S(t)A_r(t)^T - S(t)C_r^T \Sigma_v^{-1} C_r S(t) + D_r(t)D_r(t)^T \sigma^2 \\ S(t_0) = S_0 \end{cases} \quad (4-26)$$

(4-21) , (4-25) , (4-26) 式より、非定常なカルマンフィルタが構成される。

推定結果の比較により非定常なリカッチ方程式を、定常なものとは仮定することが可能な場合には、制御器の計算量の負担を少なくすることができる。カルマンゲイン $G(t)$ が時間的変化をしないと仮定し、 $\dot{S}(t) = 0$ と考えれば、(4-26) 式は代数方程式で記述される定常リカッチ方程式になる。

$$A_r S + S A_r^T - S C_r^T \Sigma_v^{-1} C_r S + D_r D_r^T \sigma^2 = 0 \quad (4-27)$$

ここで、 $S(t)$ はある正定値行列 S として得られ、カルマンゲインは次

の定常値となる．

$$G = SC_r^T \Sigma_v^{-1} \quad (4-28)$$

車両は定常状態に達してから橋梁に進入するものと考えため，
(4-26)，(4-27)式の初期条件は，次の定常状態の車両-路面
系のリカッチ方程式を解くことにより求められる．

$$A_v S_v + S_v A_v^T + D_r D_r^T \sigma^2 = 0 \quad (4-29)$$

車両が進入するまで橋梁は静止しているもの考えるので，橋梁-
動吸振器系に関する初期条件はゼロとする．

4. 2. 4 離散系カルマンフィルタの定式化

瞬時最適化理論は，離散系の方程式により記述される．この理論
により，状態フィードバック制御を行うためには，離散系の状態変
数 x_k を推定する必要がある．そこで，離散系カルマンフィルタによ
りこの状態推定を行う．離散系カルマンフィルタは，システムの離
散系確率微分方程式である(4-15)式を用いることにより定式化で
きる．このとき，離散化カルマンフィルタによる推定機構⁹⁾は，次
式で与えられる．

$$\begin{cases} \hat{X}_{k+1/k} = A_{k/k-1} \hat{X}_{k/k} + B_{k/k-1} u_k \\ \hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + G_k [Y(k) - C_r \hat{X}_{k/k-1}] \\ \hat{X}_{0/-1} = x_0 \\ A_{0/-1} = A_0 \end{cases} \quad (4-30)$$

ここで，第1式の推定状態変数ベクトル $\hat{X}_{k+1/k}$ に関する式は，時刻 k
の情報から1ステップ先の状態量の予測が行われていることを示し，
第2式の $\hat{X}_{k/k}$ に関する式は時刻 k の状態推定が，その時刻の情報から
得られることを示している．また， $Y(k)$ は観測量であり，カルマンフィ
ルタ機構を構成するためには，観測量に付加する雑音が必要である．
そこで，仮想的な正規性白色雑音 $v(k)$ を付加させた観測量 $Y(k)$ を次の
ように構成する．

$$Y(k) = C_r X_k + v(k) \quad (4-31)$$

(4-30) 式のカルマンゲイン G_k は，次式で求めることができる．

$$G_k = A_{k/k-1} C_r^T [\Sigma_{vk} + C_r A_{k/k-1} C_r^T]^{-1} \quad (4-32)$$

ここで， Σ_{vk} は $t=t_k$ 時における観測雑音の強度マトリックスであり，観測雑音 $v(k)$ の次元の対応する正定値の対称マトリックスである．

(4-32) 式は，次の推定誤差の共分散行列で決定される．

$$\begin{cases} A_{k+1/k} = A_r A_{k/k} A_r^T + D_r \Sigma_{vk} D_r^T \\ A_{k/k} = A_{k/k-1} - G_k C_r A_{k/k-1} \end{cases} \quad (4-33)$$

ここで， Σ_{vk} は $t=t_k$ 時におけるシステム雑音の強度マトリックスであり，システム雑音の次元に対応する正定値の対称マトリックスである．

(4-30) 第2式と (4-33) 第2式は，時刻 k の $X_{k/k}$ および $A_{k/k}$ の値をその時刻の情報から推定しているため，フィルタリングアルゴリズムと呼ばれ，(4-30) 第1と (4-33) 第1は，時刻 $k+1$ の $X_{k+1/k}$ および $A_{k+1/k}$ の値を時刻 k の情報から予測しているため，予測アルゴリズムと呼ばれる．システムが線形で可制御かつ可観測である場合，カルマンフィルタは常に漸近安定である．

ここで，(4-33) 第2式を (4-33) 第1式に代入した後，さらに (4-32) 式を代入すると，離散系における次のリカッチ方程式が得られる．

$$A_{k+1/k} = A_r A_{k/k-1} A_r^T - A_r A_{k/k-1} C_r^T [\Sigma_{vk} + C_r A_{k/k-1} C_r^T]^{-1} C_r A_{k/k-1} A_r^T + D_r \Sigma_{vk} D_r^T \quad (4-34)$$

また，初期条件は以下で与えられる．

$$\hat{X}_{0/-1} = x_0, \quad A_{0/-1} = A_0 \quad (4-35)$$

4. 3 確率的制御理論

4. 3. 1 確率的制御理論 (LQG制御) について

交通荷重による道路橋の振動制御における，アクティブ制御およびハイブリッド制御を状態フィードバックで実現する場合，直接計測できない車両などの状態量を推定する必要がある．この推定機構にカルマンフィルタを適用し，これを制御系に組み込んだものが確率的制御理論（LQG制御）である．状態フィードバック制御則の定式化において，最適制御の問題と状態推定の問題とは，それぞれ独立に扱うことができる．これは，制御と観測に関する分離定理と呼ばれるもので，確率的制御理論を用いた制御系を定式化する場合に，重要な定理になる．確率的制御理論に適用する制御理論の方程式の記述に合わせて，連続系カルマンフィルタまたは離散系カルマンフィルタを選択する．橋梁を梁モデルとした場合の，確率的制御理論に

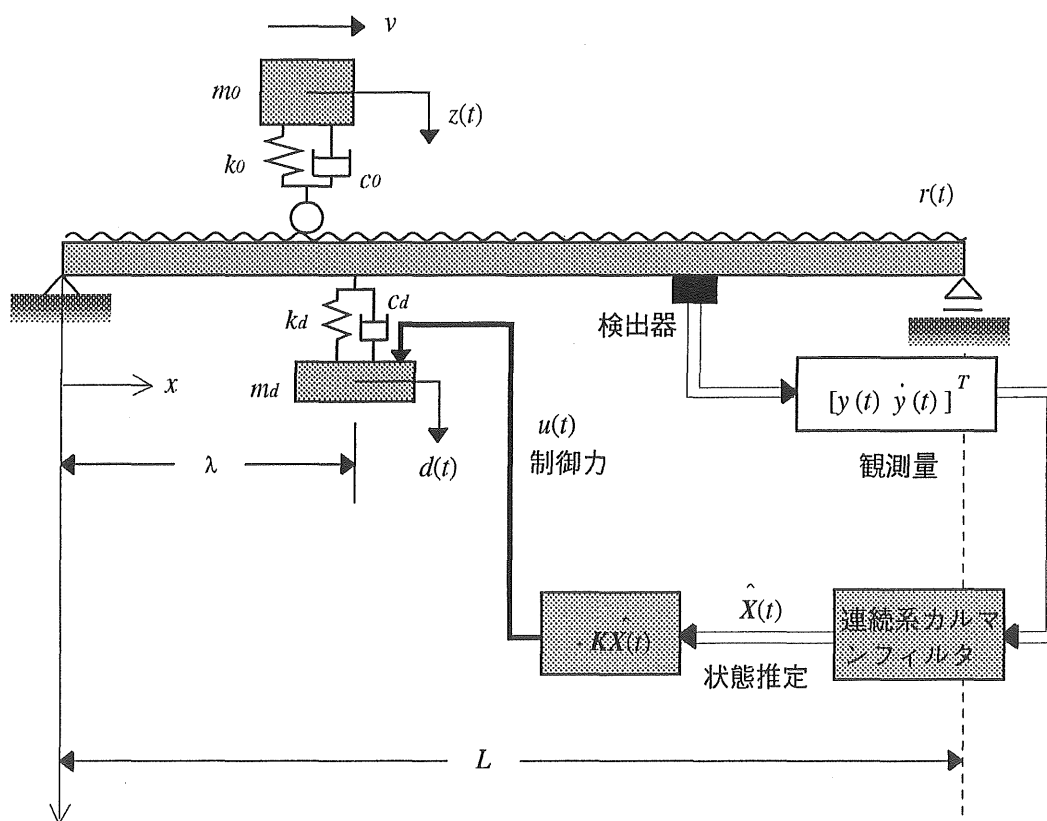


図 4.4 連続系LQG制御

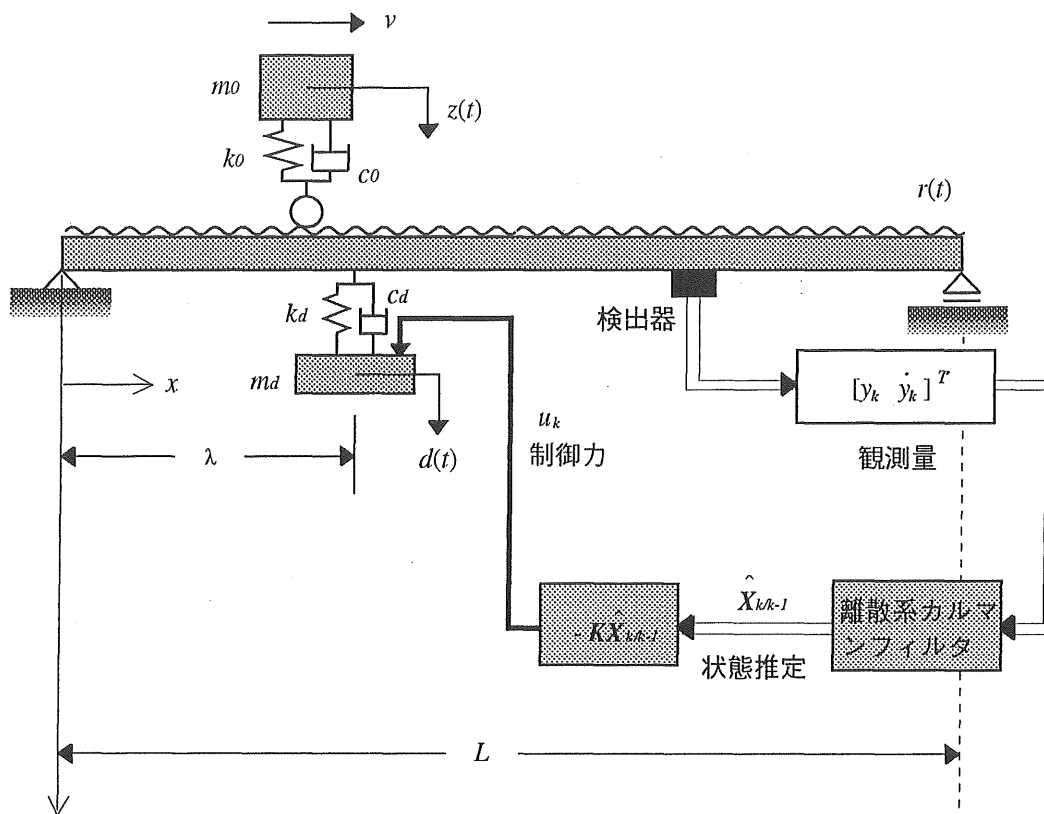


図 4.5 離散系LQG制御

よる状態フィードバックの構成について，連続系カルマンフィルタによる場合を図4.4，離散系カルマンフィルタによる場合を図4.5に示す．

4. 3. 2 最適レギュレータ理論による確率的制御

図4.4に示すように，動吸振器を設置した橋梁上を車両が走行するときの，橋梁-動吸振器-車両系の状態フィードバック制御を考える．この場合，車両の状態変数は検出できない．したがって，(3-37)式の状態フィードバック制御則を実現するために，制御系はカルマ

ンフィルタを組み込んだ形で確率論的に定式化¹⁵⁾ する必要がある。定式化に際し、制御理論として最適レギュレータ理論を用いる場合、カルマンフィルタは連続系の式を使用する。

路面凹凸の変位を含む橋梁-動吸振器-車両-路面系の状態変数を、次のように定義する。

$$X(t) = [q(t)^T \quad \dot{q}(t)^T \quad d(t) \quad \dot{d}(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t) \quad r(t)]^T \quad (4-36)$$

カルマンフィルタにより推定された状態変数 $\hat{X}(t)$ による、状態フィードバック制御の基礎式は、白色雑音 $n(t)$ を入力とし、制御入力 $u(t)$ を含む次の確率微分方程式で表現できる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A_r(t)\hat{X}(t) + B_r u(t) + D_r(t)n(t) \\ \hat{Y}(t) = C_r \hat{X}(t) + v(t) \end{cases} \quad (4-37)$$

上式における状態変数の推定値 $\hat{X}(t)$ は、次のカルマンフィルタにより得られる。

$$\dot{\hat{X}}(t) = A_r(t)\hat{X}(t) + B_r u(t) + G(t)[Y(t) - C_r \hat{X}(t)] \quad (4-38)$$

次に、制御入力 $u(t)$ は、(4-37) 式の状態変数 $\hat{X}(t)$ およびフィードバックゲイン K より次式のように与えられる。

$$u(t) = -K\hat{X}(t) \quad (4-39)$$

最適レギュレータ理論において、この制御入力は、 $\hat{X}(t)$ と $u(t)$ が確率変数になるために、次の二次形式の評価関数を最小にするように選ばれる。

$$J = E \left[\int_0^\infty [\hat{X}(t)^T Q \hat{X}(t) + u(t)^T R u(t)] dt \right] \quad (4-40)$$

(4-38) 式における、カルマンゲイン $G(t)$ は (4-25) , (4-26) 式より求められる。

カルマンフィルタが定常の場合、カルマンゲイン $G(t)$ は定常値となり、(4-27) , (4-28) 式より与えられる。

(4-39) 式で記述される制御入力 $u(t)$ を、橋梁-動吸振器-車両系を表す (3-5) 式およびカルマンフィルタを表す (4-38) 式にそれぞれ代入し整理する。この結果、推定機構にカルマンフィルタを

用いた状態フィードバック制御系すなわち，確率的制御の方程式は，次式のようになる．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) - BK\hat{X}(t) + D(t)r(t) \\ \dot{\hat{X}}(t) = \{A_r(t) - B_rK - G_k(t)C_r\}\hat{X}(t) + G_k(t)Cx(t) \end{cases} \quad (4-41)$$

4. 3. 3 瞬時最適化理論による確率的制御

交通荷重による道路橋の振動制御を確率的制御理論により実施する場合，振動の非定常性をより効果的に制御するために，これに離散系カルマンフィルタと瞬時最適化理論を適用する．橋梁を梁モデルとした場合，確率的制御理論によるフィードバック制御の構成は図4.5に示した．

橋梁-動吸振器-車両系の離散化された状態変数ベクトルを，次のように定義する．

$$x_k = [q_k^T \quad \dot{q}_k^T \quad d_k \quad \dot{d}_k \quad z_k \quad \dot{z}_k]^T \quad (4-42)$$

この状態変数 x_k を用いると，橋梁-動吸振器-車両系の状態方程式は，路面凹凸 r_k ， r_{k-1} を考えて，(3-51)，(3-52) 式のように表せる．このシステムが可制御かつ可観測である場合，制御則に瞬時最適化理論を適用すると，最適制御入力 u_k は，(3-50) 式における二次形式の評価関数を各時刻において最小にするものとして選ばれる．最適制御入力 $u(t)$ は，(3-60) 式で与えられる．瞬時最適化制御理論による確率論的制御を実現するためには，車両の状態変数を推定する必要があるため離散系カルマンフィルタを組み込んだ形で定式化する．

路面凹凸の変位を組み込んだ状態変数を次のように定義する．

$$X_k = [q_k^T \quad \dot{q}_k^T \quad d_k \quad \dot{d}_k \quad z_k \quad \dot{z}_k \quad r_k]^T \quad (4-43)$$

白色雑音 n_k を入力とする次の確率微分方程式によりカルマンフィルタの基礎式が誘導できる．

$$\begin{cases} \hat{X}_k = T(k-1) + S_{k3}(B_{1k}u_k + D_{1k}n_k) \\ T(k-1) = S_{k1}\hat{X}_{k-1} + S_{k2}(B_{1k-1}u_{k-1} + D_{1k-1}n_{k-1}) \\ \hat{Y}(k) = C\hat{X}_k + v(k) \end{cases} \quad (4-44)$$

これを基礎式として，(4-30)式の離散化カルマンフィルタにより，(4-44)式の状態変数が推定できる．

(4-44)式で，制御入力は次式のように与えられる．

$$u_k = -K_k \hat{X}_{k/k-1} \quad (4-45)$$

瞬時最適化制御理論において，この制御入力は， $\hat{X}_{k/k-1}$ と u_k が確率変数になるために，次の二次形式の評価関数を最小にするように選ばれる．

$$J(k) = E[\hat{X}_{k/k-1}^T Q \hat{X}_{k/k-1} + u_k^T R u_k] \quad (4-46)$$

(4-30)式における，カルマンゲイン G_k は(4-32)式で与えられ， $A_{k/k-1}$ は(4-34)式のリカッチ方程式より求められる．

4. 4 歩道橋振動へのオブザーバー理論の適用

4. 4. 1 オブザーバーの定式化

確定系の状態推定には，カルマンフィルタを用いるよりも，オブザーバーを適用した方が現実的である．オブザーバーは，Luenberger¹⁶⁾により提案された手法である．オブザーバーも，推定不可能な外力などの入力変数や，直接得られた出力変数を用いて，全ての状態変数を推定する推定機構である．状態フィードバックにより， r 次の振動モードまで制御を行う場合，基本的には， r 個の観測点を設置することにより， $2r$ 個の状態変数を求めなければならないが，オブザーバーを用いることにより，1個の検出器から必要な状態量を推定し，構造物の振動を制御することが可能になる．

オブザーバーの理論には主に次の2つの方法¹⁷⁾がある．

1) 全次元オブザーバー

観測可能な状態変数も含めて，制御対象内の全状態変数を推定するオブザーバー

2) 最小次元オブザーバー

観測不可能な状態変数だけを推定し，オブザーバーの次元を下げて構成するオブザーバー

本研究では，設計が単純な全次元オブザーバーを用いる．ここでは，外力の作用が単調で不確定要素の少ない歩行者による歩道橋振動の状態推定にこれを用いる¹⁸⁾．

吊床版歩道橋の観測方程式 $y(t)$ は，(3-32) 式で示した状態方程式に対し次のように与えられる．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t) \quad (4-47)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4-48)$$

状態変数 $x(t)$ に対して，オブザーバーによる状態推定値を $\hat{x}(t)$ とおく．このとき，制御系のシステムに対する全次元オブザーバーは次のように与えられる．

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_s \hat{x}(t) + B_s u(t) + D_s f(t) + G\{y(t) - \hat{y}(t)\} \quad (4-49)$$

$$\hat{y}(t) = C_s \hat{x}(t) \quad (4-50)$$

ここで， A_s は $(2r \times 2r)$ の係数マトリクス， D_s は $(2r \times s)$ の外力に係わるマトリクス， B_s は $(2r \times m)$ の制御入力に係わるマトリクスである．このように，全次元オブザーバーは，制御対象と同一の動的モデルを持ち，観測値と推定値の出力の差をフィードバックすることにより推定モデルを構成する．

また，(4-50) 式を (4-49) 式に代入すると，次式が得られる．

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_s - GC_s) \hat{x}(t) + Gy(t) + B_s u(t) + D_s f(t) \quad (4-51)$$

4. 4. 2 オブザーバーによる振動制御のための定式化

全次元オブザーバーを用いたときの制御則を考える。

オブザーバーを用いたときの制御入力 $u(t)$ は，状態推定値 $\hat{X}(t)$ により，次のように与えられる。

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (4-52)$$

制御系のシステムとその全次元オブザーバーの状態方程式は，
(4-47)，(4-48)，(4-51) 式で与えられた。これより，
(4-52) 式を (4-47) 式および (4-51) 式に代入すると，オブザーバーを用いた制御則における方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) + Df(t) \quad (4-53)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_s - GC_s - B_sK)\hat{x}(t) + GC_sx(t) + D_s f(t) \quad (4-54)$$

が得られる。

4. 5 まとめ

構造物の振動制御においてアクティブ制御を適用する場合，一般に状態フィードバックが適用される。しかし，交通荷重による橋梁振動では，現場において車両の状態量を計測することは不可能である。そこで，本研究では，橋梁に設置した検出器の信号からこれを推定する。橋梁系では路面凹凸上を走行する車両の不規則外力が問題となるため，この状態推定に適したカルマンフィルタを採用する。次に，カルマンフィルタを最適化制御理論に組み込んだ確率的制御理論（LQG制御）の適用を考える。本章では，橋梁-車両系のハイブリッド制御における，カルマンフィルタによる状態推定および確率的制御理論の定式化を，それぞれ連続系と離散系の場合について行った。

得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 路面凹凸を確率過程でモデル化することにより，橋梁 - 動吸振器 - 車両系の確率微分方程式を，連続系と離散系の場合に対して誘導した．

(2) 得られた連続系確率微分方程式を基礎に，非定常カルマンフィルタと定常カルマンフィルタの定式化を行った．さらに，離散系確率微分方程式より，離散系カルマンフィルタを誘導した．

(3) 連続系カルマンフィルタを最適レギュレータ理論に組み込んだ連続系の確率的制御理論の定式化を行った．また，離散系カルマンフィルタを瞬時最適化理論に組み込んだ，離散系の確率的制御理論の定式化を行った．

(4) 歩行者による歩道橋振動の状態推定を行うために全次元オブザーバーを誘導した．さらに，オブザーバーを制御則に組み込んだ場合の定式化を行った．

参考文献

- 1) 岩井善太・井上昭・川路茂保：オブザーバー，コロナ社，1988.10.
- 2) 榎本義一・添田喬・中溝高好：確率システム制御の基礎，日新出版，1975.5.
- 3) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書，1977.1.
- 4) 砂原善文：確率システム理論，電子通信学会，1979.3.
- 5) 岡林隆敏・吉村徹・手塚勝・加賀敏明：道路橋交通振動における状態推定へのカルマンフィルタの適用，長崎大学工学部研究報告，Vol.25,No.45,pp.195-202,1995.7.
- 6) 岡林隆敏・吉村徹・手塚勝・加賀敏明：カルマンフィルタによる道路橋交通振動の状態推定，第3回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.25-32,1995.8.
- 7) 吉村徹・岡林隆敏・加賀敏明：走行車両による道路橋振動制御における状態推定に関する考察，土木学会橋梁交通振動に関するコロキウム論文集 PART.B,pp.257-264,1995.11.
- 8) 岡林隆敏・吉村徹・加賀敏明：走行車両による単純桁橋振動のカルマンフィルタによる状態推定，構造工学論文集，Vol.42A,pp.723-730,1996.4.
- 9) 中野道雄・西山清：パソコンで解くカルマンフィルタ，丸善，1993.2.
- 10) P.Dorato,C.Abdallah and V.Ceronep:Linear-Quadratic Control,Prentice-Hall,Inc.,1995.
- 11) 砂原善文：確率システム理論，電子通信学会，1979.3.
- 12) G.Chen,G.Chen and S.H.Hsu:Linear Stochastic Control Systems,CRC Press,Inc.,1995.
- 13) 橋梁振動研究会：橋梁振動の計測と解析，技報堂出版，1993.10.
- 14) 河合平夫・森崎健二：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol.24,pp.20-28,1965.

- 15) 岡林隆敏・加賀敏明・吉村徹・尾口慎也：単一車両が走行する道路橋の確率的制御理論による振動制御，土木学会論文集，1998.4.
- 16) D.G.Luenberger:Observing the State of a Linear System,IEEE Trans.Mil.Electron,MIL-8 ,pp.74-80,1964.
- 17) 白石昌武：入門現代制御理論，啓学出版，1987.11.
- 18) 岡林隆敏・馬渡あかね・加賀敏明：MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の歩行者励起振動の解析と制御設計，構造工学論文集，Vol.43A,pp.693-702,1997.3.

第 5 章 状態推定理論による数値解析

5. 1 はじめに

本章では，カルマンフィルタによる状態推定の精度を数値シミュレーションにより検討する．プレートガーダー橋の梁モデルおよび有限帯板モデルによる橋梁 - 動吸振器 - 車両 - 路面系を考え，橋梁上の1点の観測値から橋梁の3次振動までと，車両，動吸振器および路面凹凸の状態推定^{1) 2) 3) 4) 5)}を実施する．シミュレーションによる目標値と推定結果を比較することによりカルマンフィルタによる状態推定の有効性を検討する．

一方，吊床版歩道橋に対しては，オブザーバーによる状態推定^{6) 7)}を実施する．吊床版歩道橋は比較的低い振動数の範囲に多くの振動モードが存在する．振動制御の対象とする曲げ10次振動までを状態推定する．橋梁上の1点の観測値から，吊床版歩道橋振動における状態推定の有効性を検討する．

5. 2 梁モデルのカルマンフィルタによる状態推定

5. 2. 1 橋梁，動吸振器および車両の諸元と計算条件

梁モデルで状態推定の対象とした橋梁の諸元は，第2章の表2.1における支間長40(m)のモデルである．動吸振器および車両の諸元を表5.1と表5.2に示す．車両は一定速度 $v=10(m/sec)$ で橋梁上を走行するものとする．動吸振器の固有振動数は，橋梁の1次振動に同調するように設計する．この動吸振器の最適パラメータは，古典的設計法⁸⁾と呼ばれる設計手法により算出した値である．古典的設計法では，橋梁の k 次の振動数 f_k と(2-2)式で定義した橋梁に対する動吸振器の質量比 μ_{kd} を用いて，外力から橋梁の変位応答に至る周波数伝達

表 5.1 動吸振器(TMD)の最適パラメータ

質量比	1/50
振動数 (Hz)	2.83
減衰定数	0.12

表 5.2 車両の諸元

重量 (t)	20.0
振動数 (Hz)	3.00
減衰定数	0.03

関数の最大値が最小になるように動吸振器の固有振動数 f_d と減衰定数 h_d を決定する．このとき，橋梁の k 次振動に対する最適同調パラメータは，次式のようになる．

$$f_d = \frac{f_k}{1 + \mu_{kd}} \quad (5 - 1)$$

$$h_d = \sqrt{\frac{3\mu_{kd}}{8(1 + \mu_{kd})}} \quad (5 - 2)$$

動吸振器の設置位置は，支間中点， $(L/2)$ 点とする．橋梁の応答計算および状態推定における着目点も，支間中点， $(L/2)$ 点とする．

(4-16)，(4-17) 式を用いて求めた橋梁の応答に，観測雑音を付加して観測量を作成する．観測雑音は，橋梁の最大応答に対し，標準偏差で 5 % とする．この場合，雑音の強度（分散）は， $\Sigma_v = 6.45 \times 10^{-4}$ になる．

検出器（加速度計）の設置位置は支間中点， $(L/2)$ 点とし，仮想的な雑音を付加した橋梁上の 1 点の変位と速度の観測量から，非定常カルマンフィルタおよび定常カルマンフィルタにより，①橋梁の 1 次から 3 次振動までの基準座標の状態変数，②車両，動吸振器および路面の状態変数を推定する．推定値と数値シミュレーションによ

る応答を比較することにより，カルマンフィルタの有効性を検討する．

5. 2. 2 非定常カルマンフィルタの適用

(1) 橋梁，動吸振器および車両の状態推定

図5.1に橋梁の各次振動における基準座標の状態推定結果，図5.2a)に橋梁の支間中点， $(L/2)$ 点の変位応答の状態推定結果を示す．この図において，実線がカルマンフィルタによる推定値であり，点線がシミュレーションによる応答である．車両が橋梁に進入するまで，橋梁は振動しないものとする．したがって，橋梁の各次振動および変位応答の初期条件はゼロである．図5.1，図5.2a)において，橋梁の各次振動および変位応答の推定値は，シミュレーションによる応答とほぼ一致しており，良好な推定を行っていることが分かる．

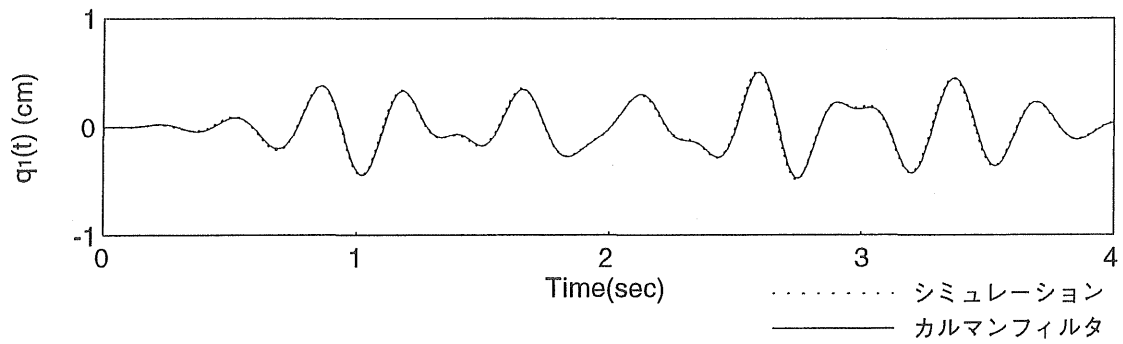
図5.2b)に動吸振器の状態推定結果を示す．車両が橋梁に進入するまで，動吸振器も振動しないものとする．したがって，これらの初期条件はゼロである．動吸振器の設置位置は，橋梁の支間中点である．図5.2b)において，動吸振器における変位応答の推定値は，シミュレーションの応答とほぼ一致しており，カルマンフィルタによる状態推定が実現できている．

図5.2c)に車両の状態推定結果を示す．車両は橋梁の40(m)手前から路面凹凸上を走行し，橋梁に進入する直前の値を車両における状態変数の初期値とする．初期条件を考慮しているので，車両は($t=0$)時刻ですでに振動している．図5.2c)において，シミュレーションにおける応答と状態推定における推定値にレベル差が見られるが，振動数は3.0(Hz)でほぼ一致しており，推定値はシミュレーションに良く追従している．

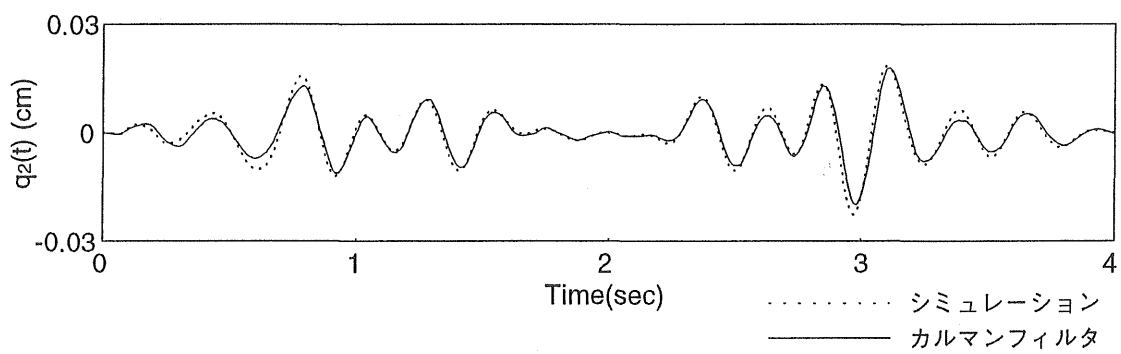
(2) 路面凹凸の状態推定

図5.3に路面凹凸の状態推定結果を示す．本研究では，路面凹凸に対し，白色雑音を入力とする微分方程式でモデル化する．このため，カルマンフィルタにより路面凹凸を推定するためには，具体的な初期条件を求める必要がある．使用する白色雑音は状態推定およびシミュレーションにおいて同じものを用いる．

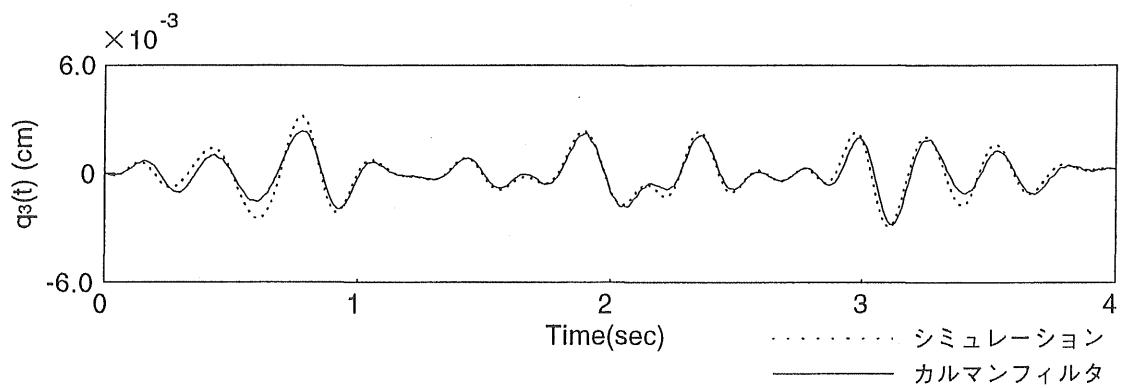
推定値の波形は，シミュレーション波形に比べて振幅レベルが大きく異なっている．本論文で定式化したカルマンフィルタでは，路面凹凸までは推定できないことが分かる．この理由としては，カルマンフィルタを構成するために，観測雑音を仮定したためであると考えられる．振動制御系を構成する状態方程式(3-5)式の制御力の項には，路面凹凸のパラメータは含まれていない．したがって，この路面凹凸の状態変数を推定することは，本研究における制御系の構成において特に重要なものではない．



a) 1次振動

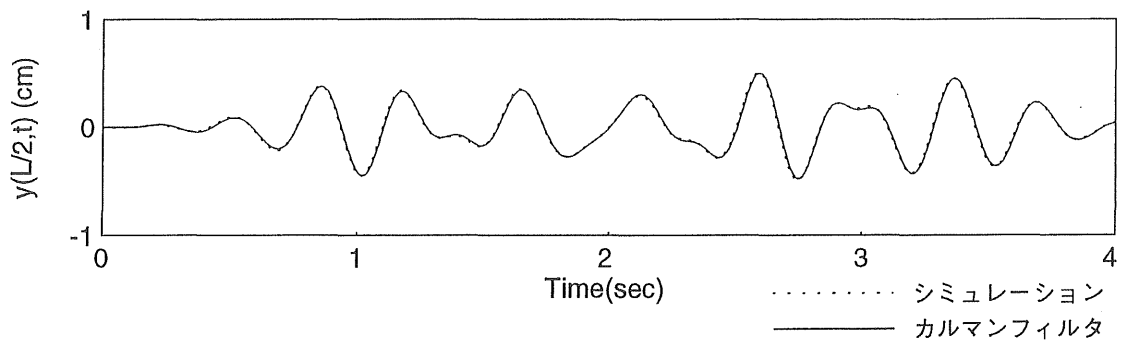


b) 2次振動

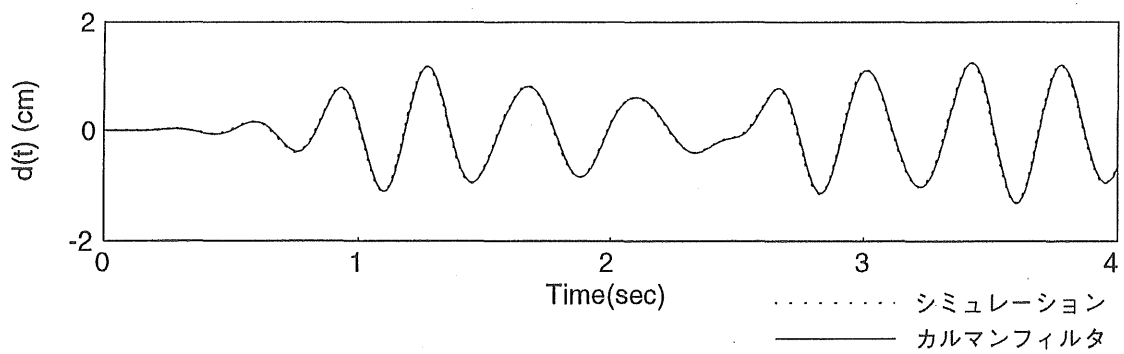


c) 3次振動

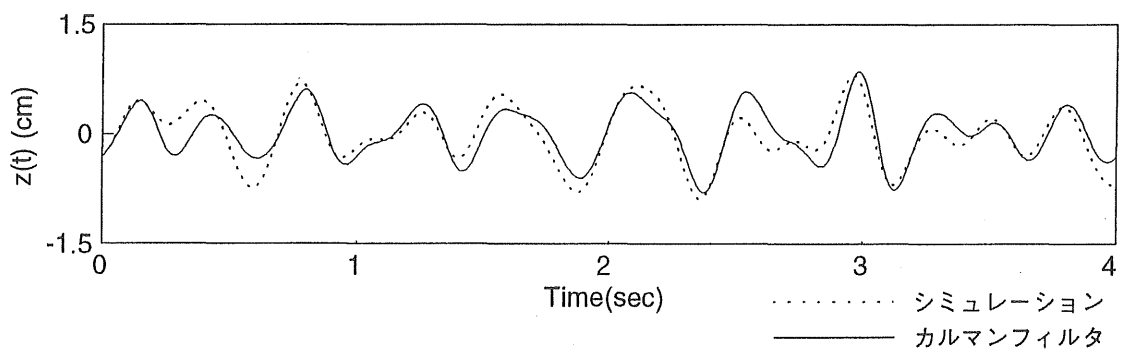
図 5.1 非定常カルマンフィルタによる
橋梁の各次振動の状態推定
(梁モデル)



a) 橋梁支間中点 ($L/2$) の変位応答

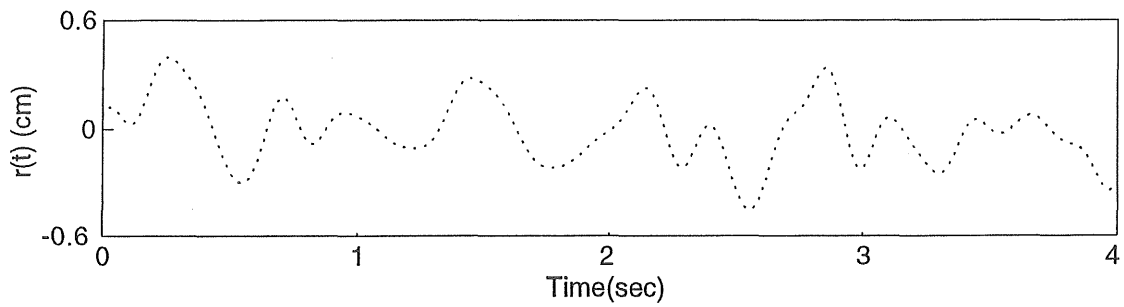


b) 動吸振器の変位応答

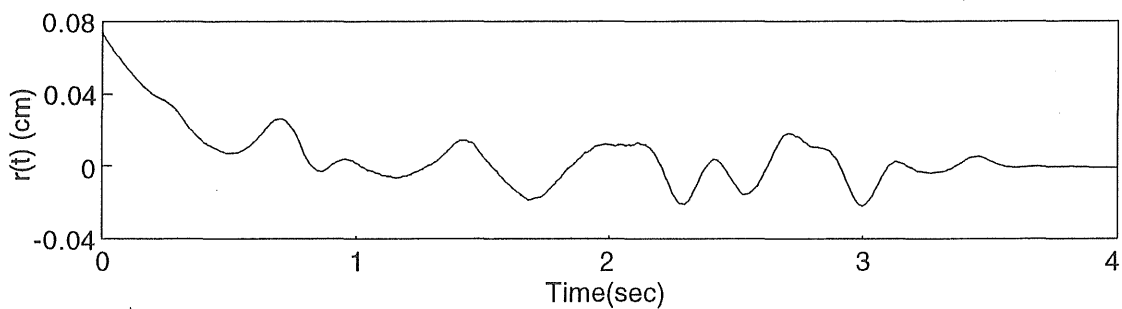


c) 車両の変位応答

図 5.2 非定常カルマンフィルタによる
橋梁、動吸振器、車両の状態推定
(梁モデル)



a) シミュレーションの結果



b) カルマンフィルタによる推定値

図 5.3 非定常カルマンフィルタによる
路面凹凸の状態推定
(梁モデル)

5. 2. 3 定常カルマンフィルタの適用

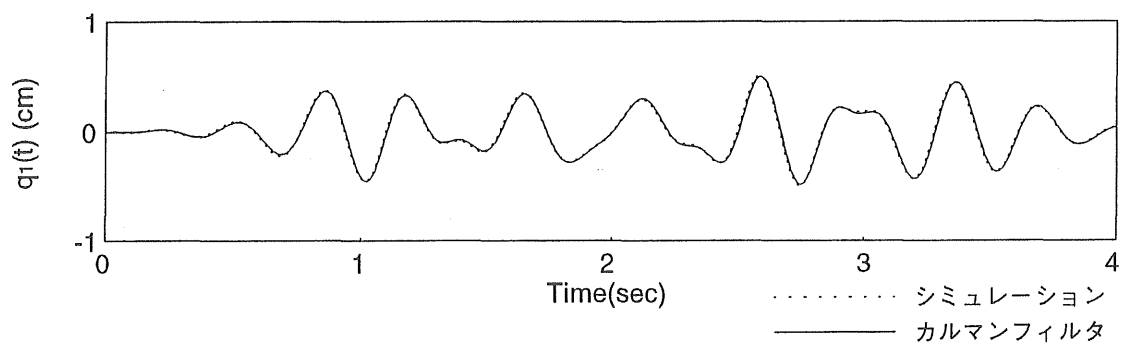
次に，定常カルマンフィルタを適用する．定常カルマンフィルタは，非定常カルマンフィルタに比べ，計算量の負担を少なくすることができる．図5.4に橋梁の各次振動の状態推定結果を，図5.5 a)に橋梁の変位応答の状態推定結果を示す．それぞれ，支間中点における応答である．実線は定常カルマンフィルタによる推定値であり，

点線はシミュレーションによる応答である。これらの図において、橋梁の各次振動および変位応答は、良好な推定結果になっている。

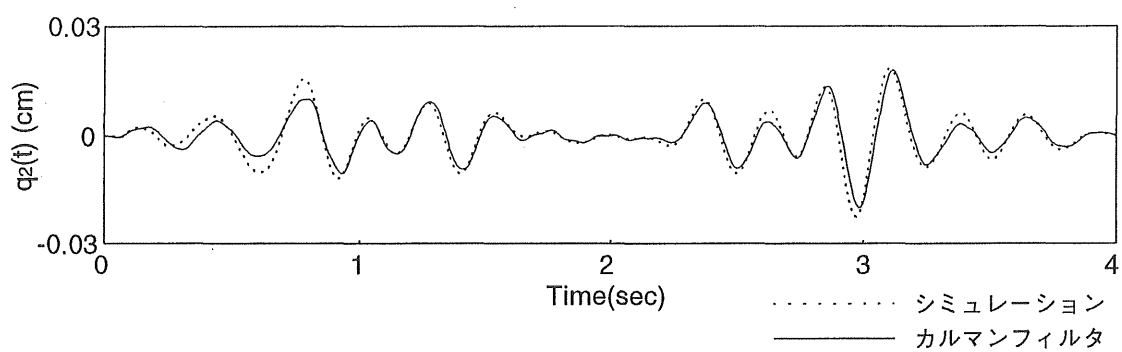
図5.5b)に動吸振器の状態推定結果を示す。動吸振器についてもほぼ完全な状態推定が実現できている。

図5.5c)に車両の状態推定結果を示す。非定常カルマンフィルタによる推定波形とほぼ同様の結果になっており、実用的には十分な推定である。

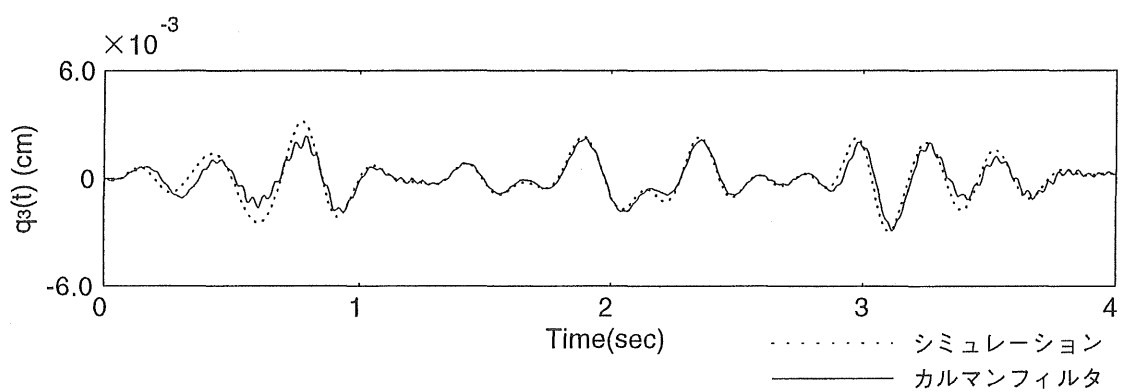
図5.6は、路面凹凸の状態推定結果を示したものである。路面凹凸の推定波形は、非定常カルマンフィルタによる推定波形とほぼ同様の結果になっている。このようなカルマンフィルタの構成において、路面凹凸まで推定することは困難であることが分かる。



a) 1次振動

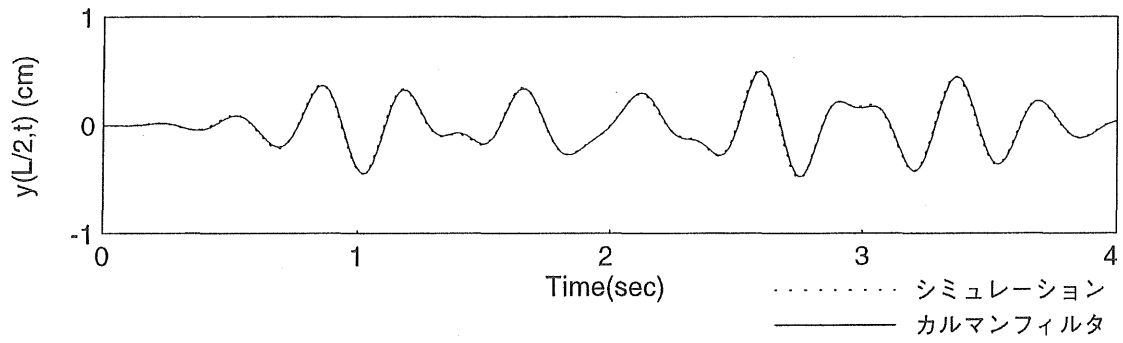


b) 2次振動

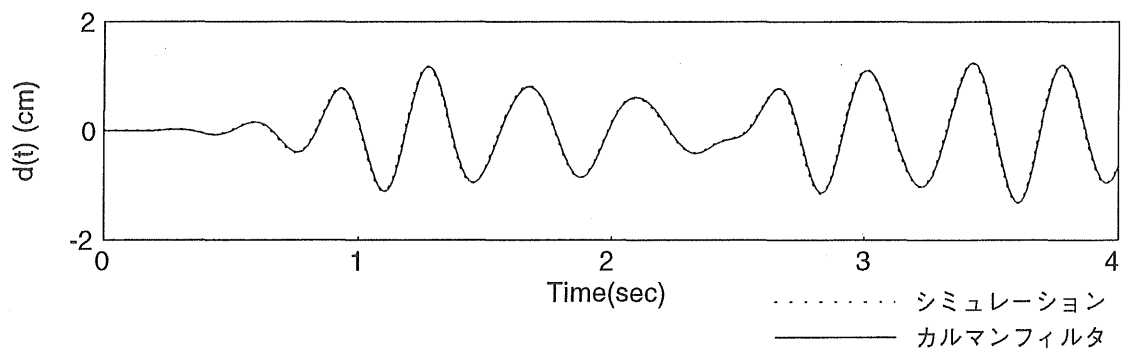


c) 3次振動

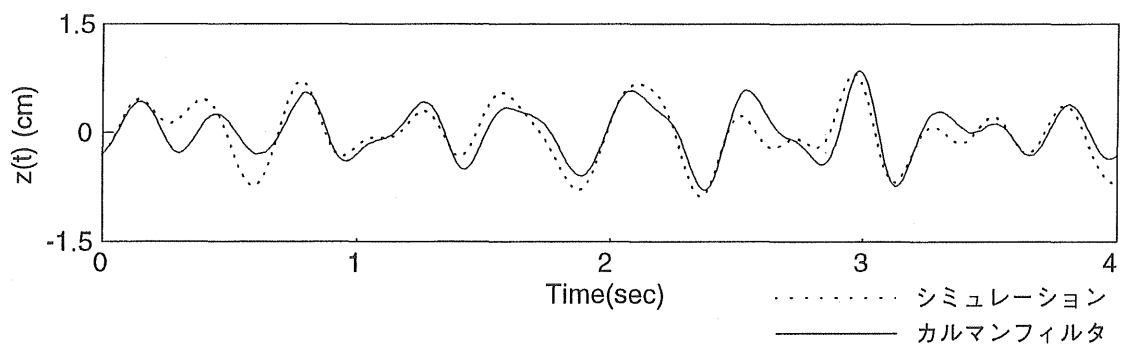
図 5.4 定常カルマンフィルタによる
橋梁の各次振動の状態推定
(梁モデル)



a) 橋梁支間中点(L/2)の変位応答

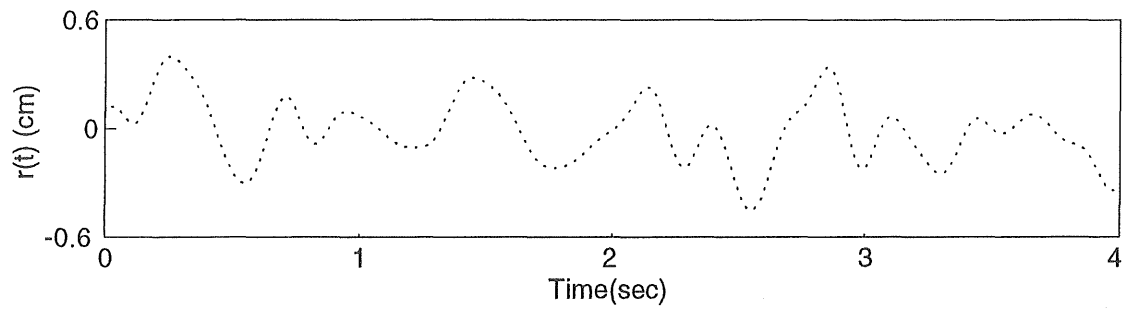


b) 動吸振器の変位応答

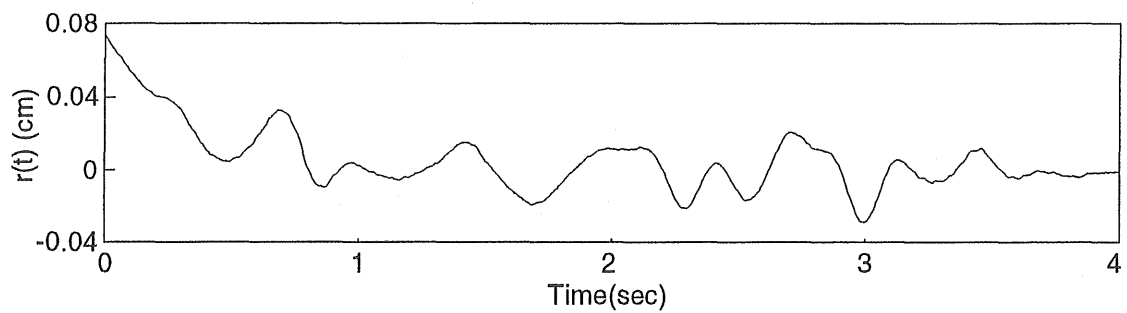


c) 車両の変位応答

図 5.5 定常カルマンフィルタによる
橋梁、動吸振器、車両の状態推定
(梁モデル)



a) シミュレーションの結果



b) カルマンフィルタによる推定値

図 5.6 定常カルマンフィルタによる
路面凹凸の状態推定
(梁モデル)

5. 3 有限帯板モデルのカルマンフィルタによる状態推定

5. 3. 1 橋梁，動吸振器および車両の諸元と計算条件

橋梁の諸元および振動モードは，第2章の表2.2，表2.3および図2.4に示すとおりである．橋梁の減衰定数は，各次振動すべて0.02と

する．車両は梁モデルの場合と同様のものを想定し，表5.2のパラメータを用いる．車両の速度は， $v=10(m/sec)$ である．また，動吸振器の最適パラメータを表5.3に示す．それぞれ，梁モデルの場合と同様に1自由度系のばね-質点系である．動吸振器の個数は1個であるものとする．動吸振器の最適パラメータは，質量比が $1/50$ の場合について最適設計を行った．この設置位置は，橋梁の幅員中央，支間中点とする．

観測量を検出する観測点と推定結果を出力する着目点を図5.7に示

表 5.3 動吸振器(TMD)の最適パラメータ

質量比	1/50
振動数 (Hz)	2.69
減衰定数	0.07

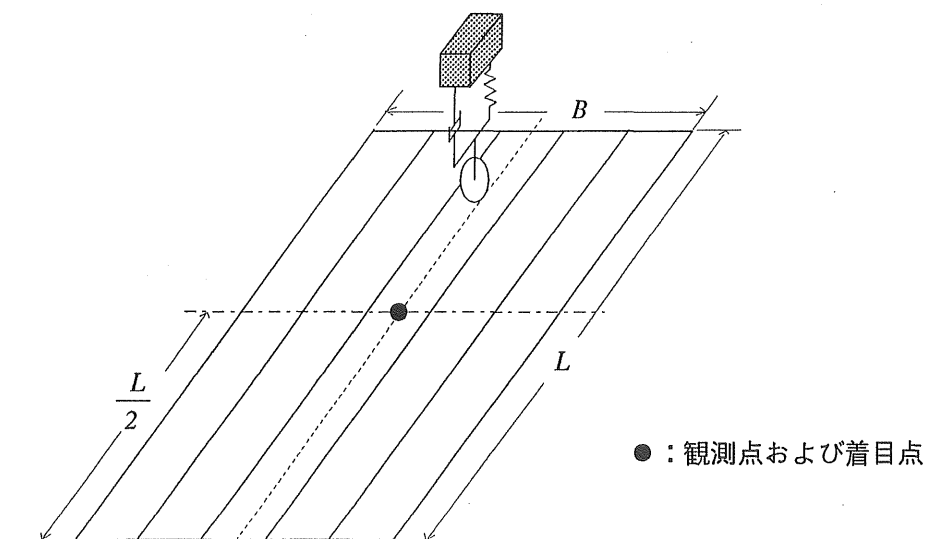


図 5.7 状態推定における観測点および着目点

す．応答計算において，車両は橋梁の幅員中央を走行するものとし，着目点は車両走行上の支間中点とする．観測量は，（４－１６），（４－１８）式より求めた橋梁の応答に，最大応答に対して，標準偏差で５％の割合の雑音を付加して作成する．このとき，雑音の強度（分散）は $\Sigma = 2.16 \times 10^{-4}$ である．この観測量 $Y(t)$ を（４－２１）式における入力値とする．検出器の設置位置は，橋梁の幅員中央，支間中点とする．梁モデルの状態推定と同じように，非定常カルマンフィルタおよび定常カルマンフィルタにより，橋梁の３次振動までの基準座標と変位応答，動吸振器，車両および路面凹凸の各変数を推定する．推定結果をそれぞれ数値シミュレーションによる応答と比較し，カルマンフィルタの有効性を検討する．

５．３．２ 非定常カルマンフィルタの適用

車両が橋梁に進入するまで，橋梁は振動しないものとする．橋梁の各次振動および変位応答の初期条件はゼロである．着目点は車両走行上の支間中点， $(B/2, L/2)$ 点である．図５．８に橋梁の各次振動における基準座標の推定結果，図５．９a)に $(B/2, L/2)$ 点における橋梁の変位応答の推定結果を示す．それぞれの図において，実線がカルマンフィルタによる推定値であり，点線がシミュレーションによる応答である．計算結果については，以下同じ表記を用いるものとする．

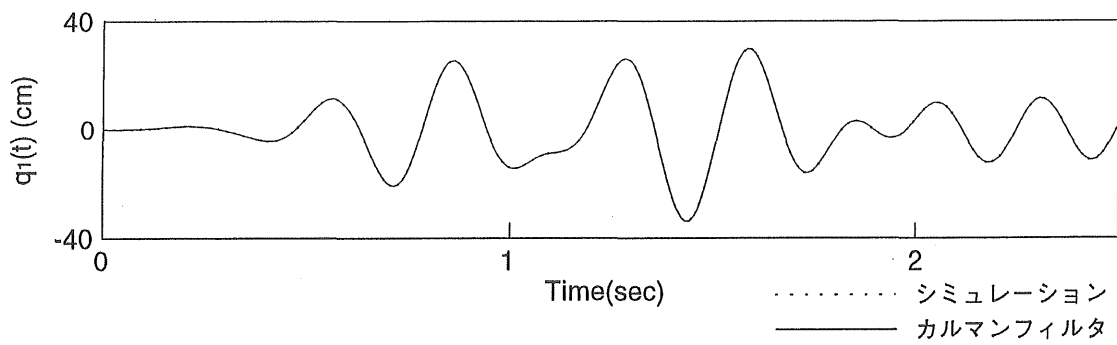
これらの図において，橋梁の各次振動および変位応答の推定値は，それぞれシミュレーションの結果とほぼ一致しており，推定の精度は良いものとなっている．なお，車両が幅員中央を走行する場合，橋梁の１次振動と３次振動が励起される．

図５．９b)は $(B/2, L/2)$ 点に設置した動吸振器の状態推定結果である．車両が橋梁に進入するまで，動吸振器も振動しないものとする．動

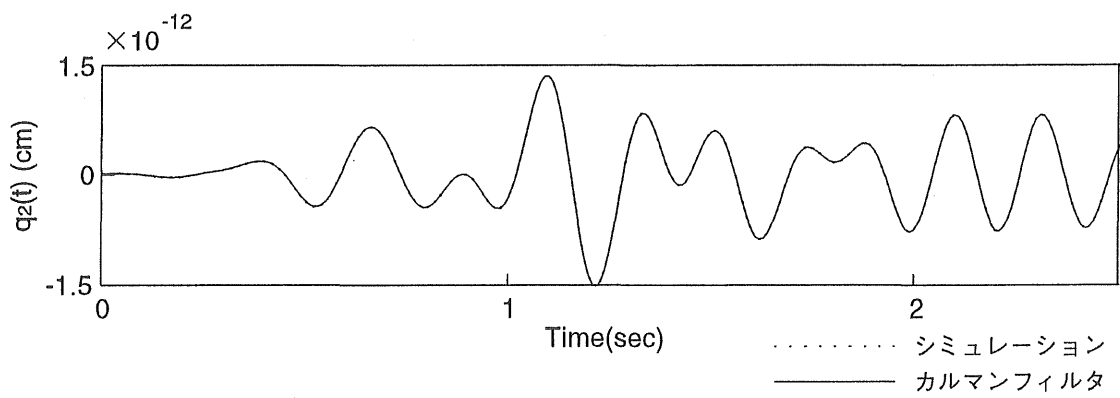
吸振器の変位応答の推定値も，シミュレーションの波形とほぼ一致しており，カルマンフィルタによる状態推定が実現できている．

図 5.9c) に，車両の状態推定結果を示す．車両の初期値は，橋梁の $60(m)$ 手前から走行し，橋梁に進入する直前の値を用いる．初期条件を考慮したので，車両は $(t=0)$ 時刻ですでに振動している．車両の応答について見ると，梁モデルで若干の推定誤差が見られたのに比較して，有限帯板モデルではほぼ完全に推定が行われている．

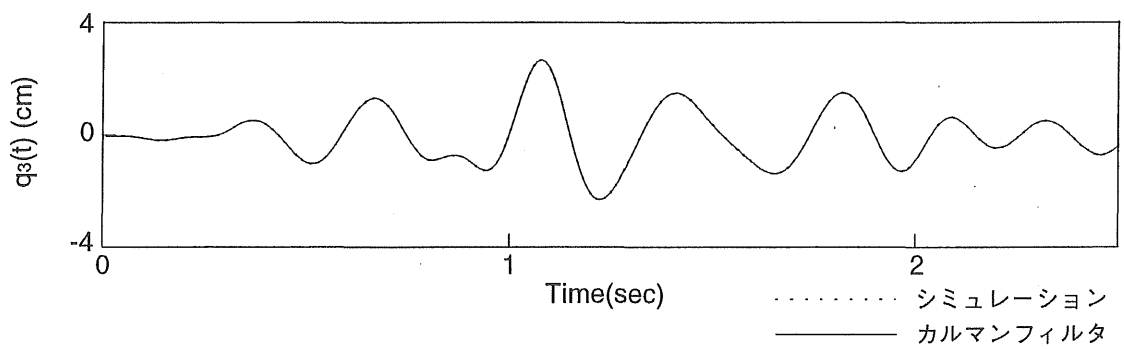
梁モデルと同様に，路面凹凸の推定には，その初期条件が必要である．図 5.10 は，路面凹凸の状態推定結果を示したものである．推定された波形は，目標とする波形に比べて振幅レベルが大きく異なっている．本研究で定式化したカルマンフィルタでは，路面凹凸まで推定することは困難であることが確認できる．



a) 1次振動

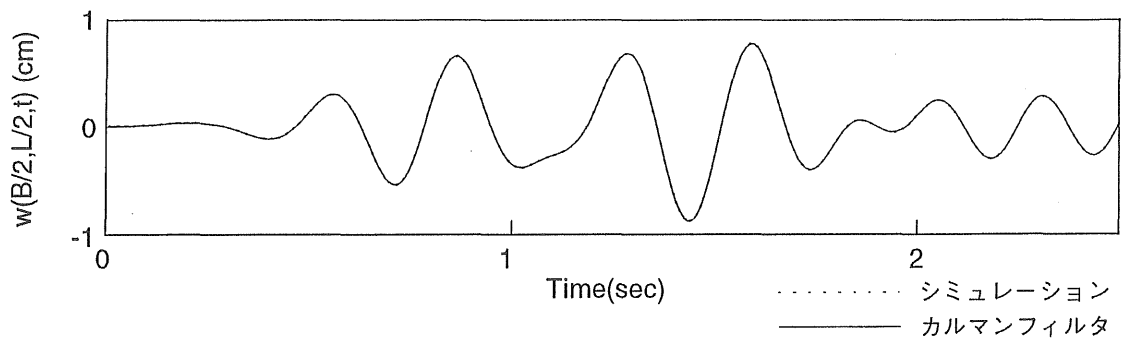


b) 2次振動

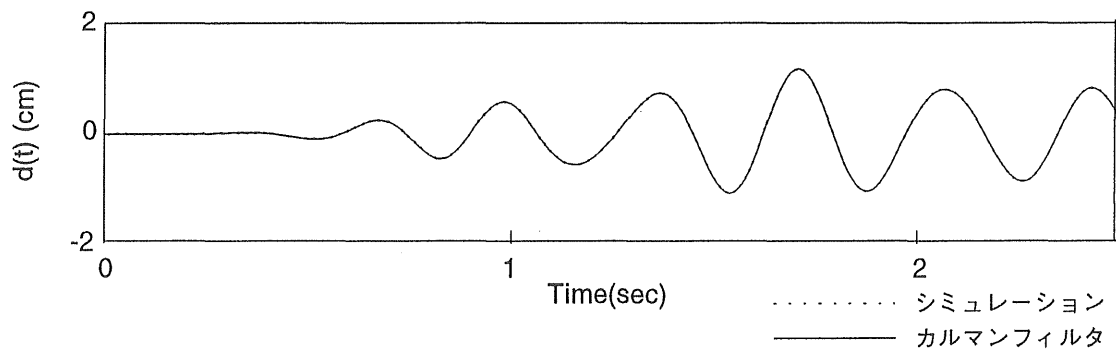


c) 3次振動

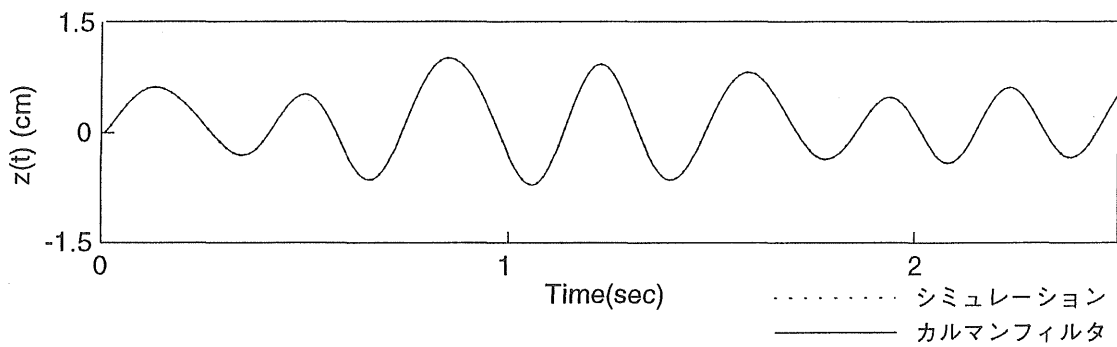
図 5.8 非定常カルマンフィルタによる
橋梁の各次振動の状態推定
(有限帯板モデル)



a) 橋梁着目点(B/2, L/2点)の変位応答

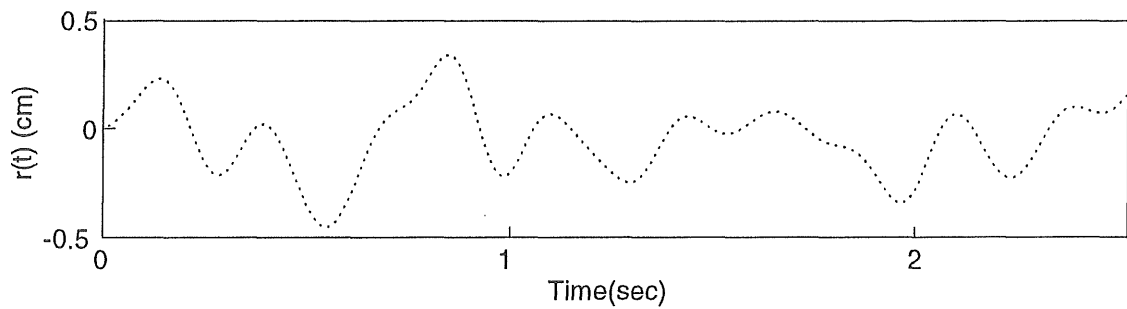


b) 動吸振器の変位応答

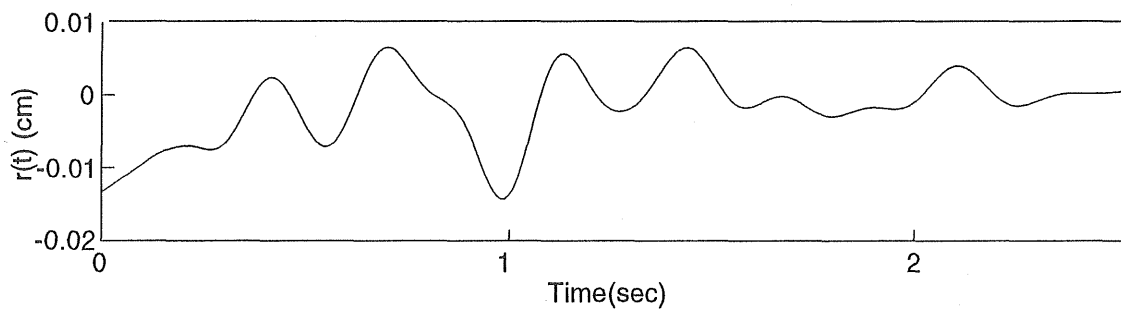


c) 車両の変位応答

図 5.9 非定常カルマンフィルタによる
橋梁、動吸振器、車両の状態推定
(有限帯板モデル)



a) シミュレーションの結果



b) カルマンフィルタによる推定値

図 5.10 非定常カルマンフィルタによる
路面凹凸の状態推定
(有限帯板モデル)

5.3.3 定常カルマンフィルタの適用

図 5.11 および図 5.12 a) に橋梁の各次振動と変位応答の定常カルマンフィルタによる推定結果を示す。実線は定常カルマンフィルタによる推定値であり、点線はシミュレーションによる値である。推定結果を見ると、橋梁の各次振動および変位応答については、非定常カルマンフィルタに比べ、若干ではあるが推定効果が劣っている。

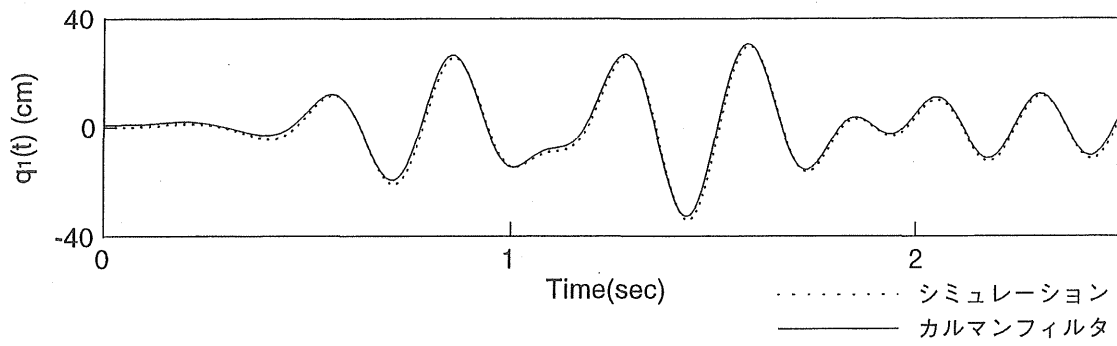
しかし，実用上の精度は満足している．

図5.12b)に動吸振器の状態推定結果を示す．この場合も，非定常カルマンフィルタによる結果と比べ，若干ではあるが推定効果が劣っている．しかし，実用には十分耐えうるものである．

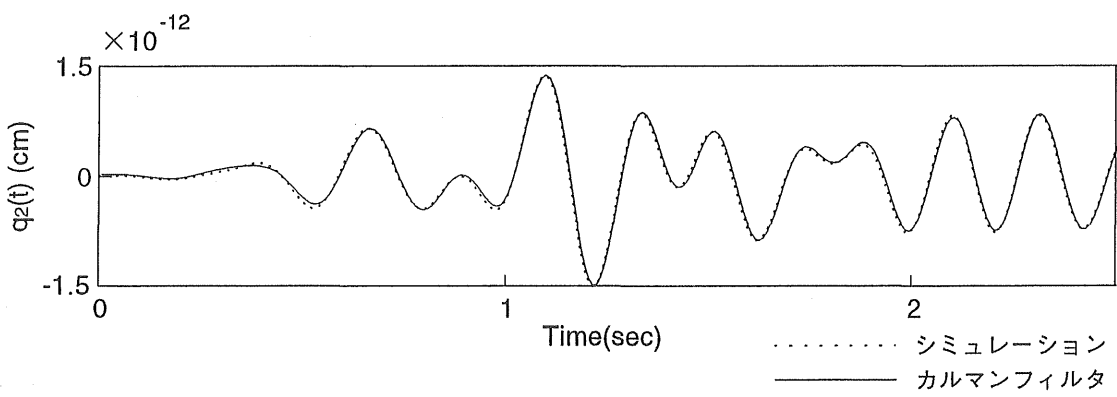
図5.12c)に車両の状態推定結果を示す．これについては，橋梁や動吸振器の場合に比べ，明らかに非定常カルマンフィルタが有効であることが分かる．特に，橋梁の両端においてこの傾向が見られる．この原因として，梁モデルに比べ有限帯板モデルの場合，橋梁の支間長が短いため，車両が橋梁の中心部を外れたとき，システムの非定常性がより強くなることが考えられる．しかし，本研究では，橋梁を振動制御の対象としているため，車両の状態量は橋梁や動吸振器の状態量ほど重要な変数ではない．このような推定結果であれば制御は十分可能であると考えられる．

非定常カルマンフィルタによる推定に比べ，定常カルマンフィルタによる推定では，車両の場合で若干の差が認められるが，橋梁や動吸振器では十分な推定が可能である．したがって，定常カルマンフィルタを用いても十分な状態推定が可能であると考えられる．

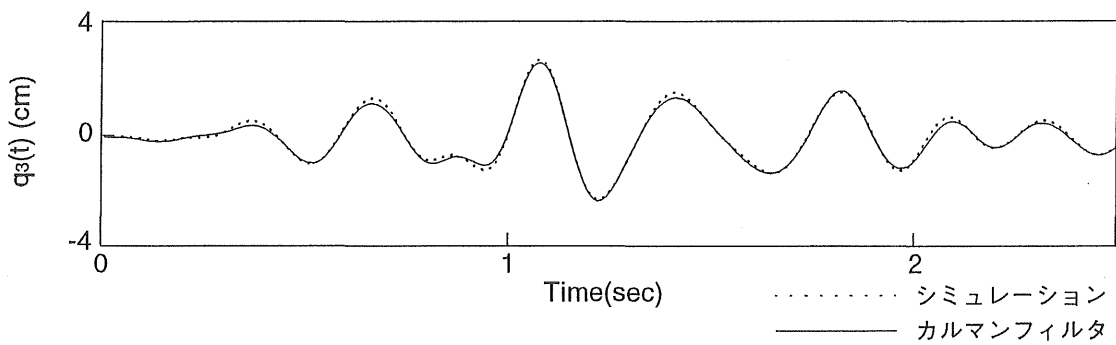
図5.13は，路面凹凸の定常カルマンフィルタによる状態推定結果を示したものである．推定結果から，非定常カルマンフィルタによるものとほぼ同レベルの推定となっており，すでに述べたようにこの方法では路面凹凸まで推定することは困難であることが分かる．



a) 1次振動

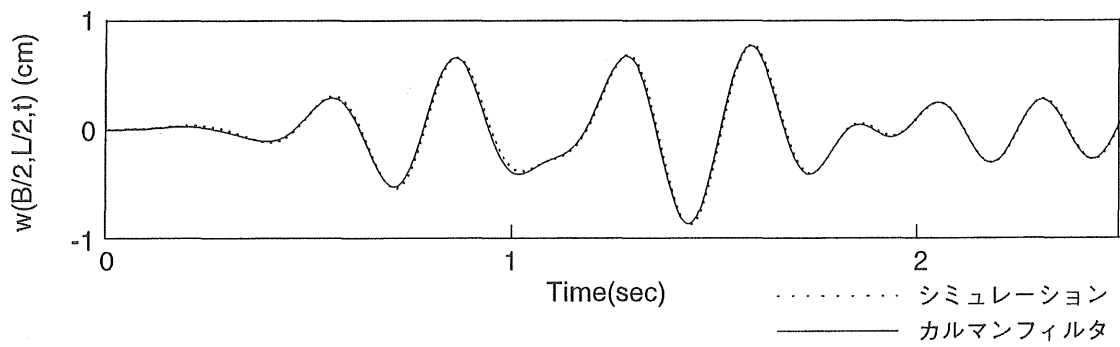


b) 2次振動

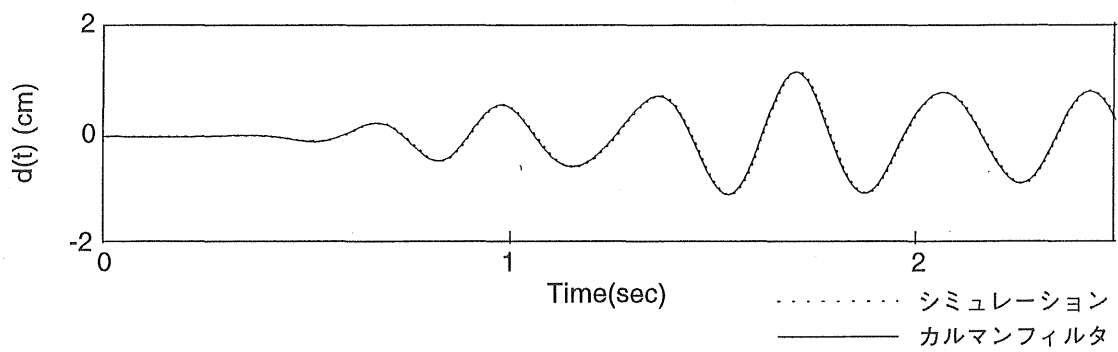


c) 3次振動

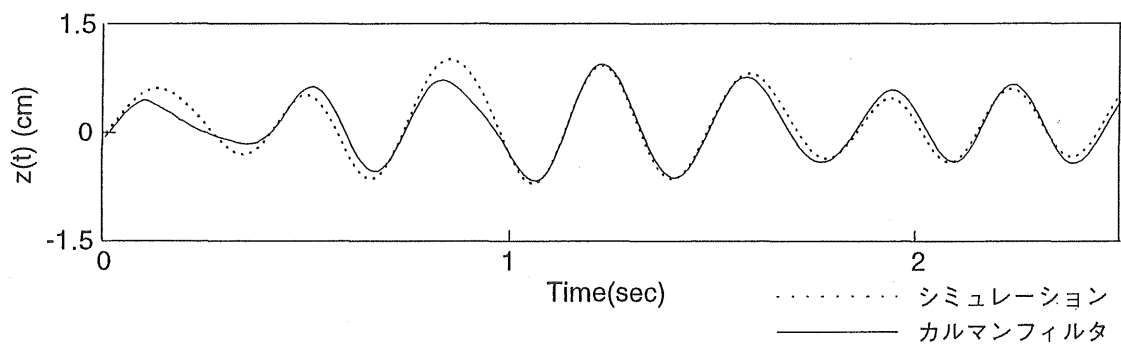
図 5.11 定常カルマンフィルタによる
橋梁の各次振動の状態推定
(有限帯板モデル)



a) 橋梁着目点(B/2,L/2点)の変位応答

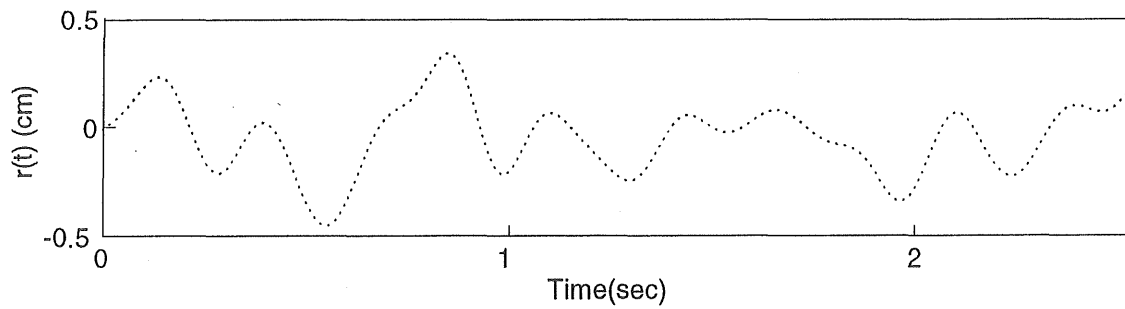


b) 動吸振器の変位応答

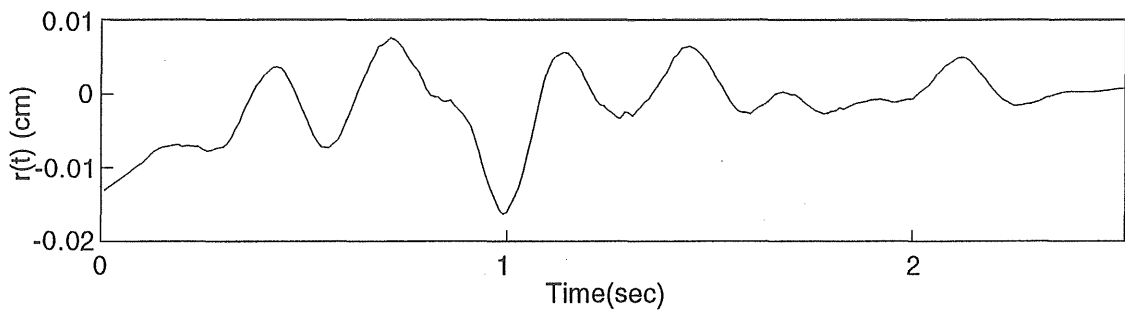


c) 車両の変位応答

図 5.12 定常カルマンフィルタによる
橋梁、動吸振器、車両の状態推定
(有限帯板モデル)



a) シミュレーションの結果



b) カルマンフィルタによる推定値

図 5.13 定常カルマンフィルタによる
路面凹凸の状態推定
(有限帯板モデル)

5. 4 吊床版歩道橋のオブザーバーによる状態推定

歩行者励起による，吊床版歩道橋振動の状態推定を全次元オブザーバーにより行う．橋梁の諸元および振動モードは，第2章の表2.5，表2.6および図2.10から図2.13に示した．また，歩行者による荷

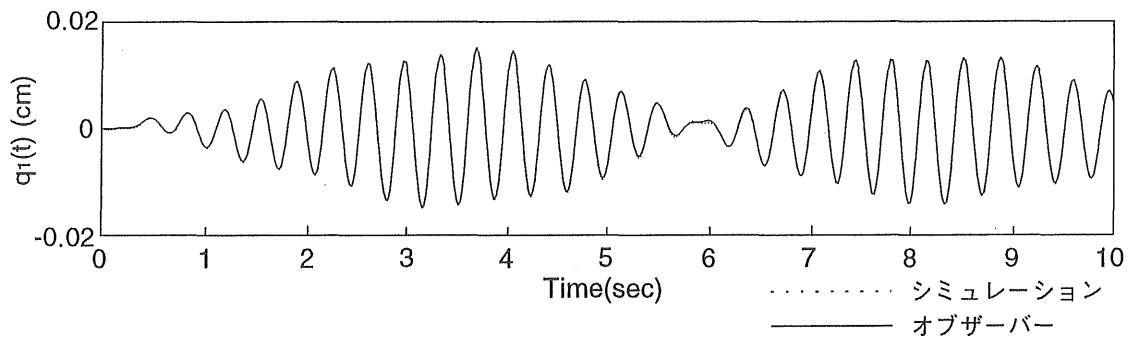
重のモデルは (3 - 30) 式に示したものである。本研究で仮定した歩行者外力の条件は，60(kgf) の人間が一人，速度 2.9(m/sec) ，歩調 2.8(Hz) で走行するものとする。走行による衝撃比を 1.6 とした場合，最大荷重は $P = 96(\text{kgf})$ となる。

歩行者が移動した場合の荷重の形態がわからない橋梁振動に対して，各振動モードが節にならない橋梁の $\frac{3}{8}L$ 地点の速度応答のみから，制御対象とする曲げ振動の 1 次から 10 次の状態変数すなわち，基準座標とその時間微分をオブザーバーにより推定する。オブザーバーの設計において，オブザーバーが速やかに推定値に収束するように，その減衰を各次振動とも $h=0.1$ とする。すなわち，次の関係になるように希望固有値^{9) 10)}を設定する。

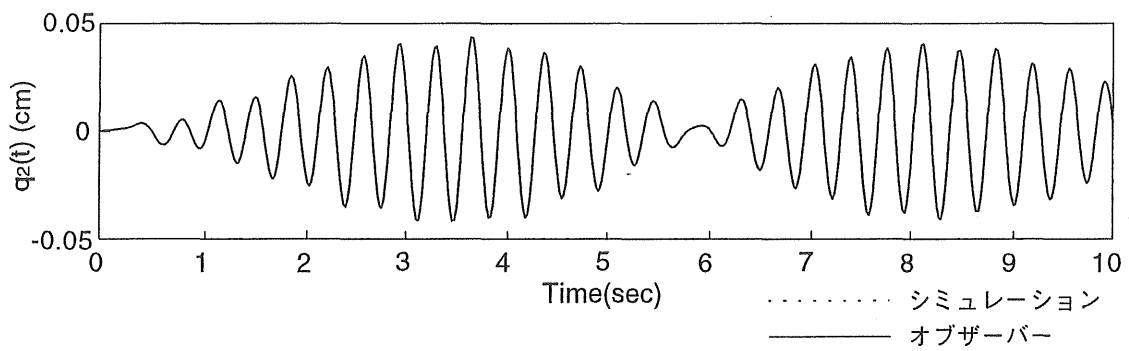
$$\lambda_k = (-h\omega_k + i\omega_k)\alpha, \lambda_{k+1} = (-h\omega_k - i\omega_k)\alpha \quad (5 - 3)$$

ここで， ω_k は構造系の固有振動数， α は極配置における逆行列を特異にしないためのパラメータで，ここでは $\alpha=1.1$ とする。

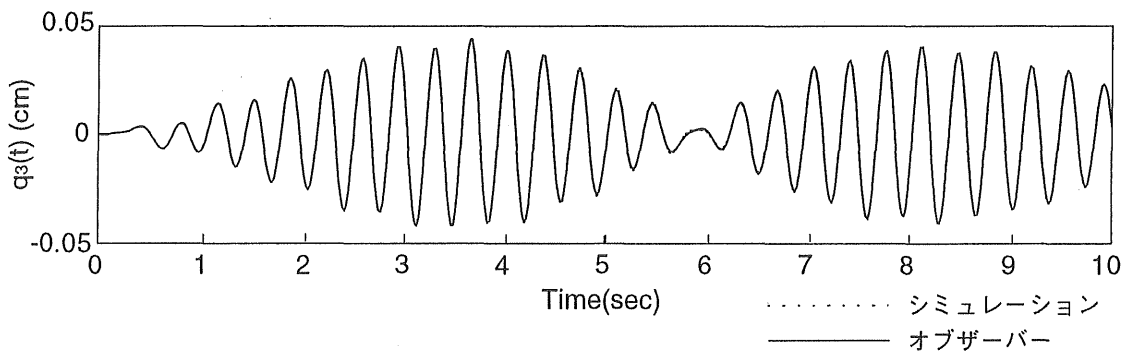
このような設計条件でオブザーバーを設計し，状態推定を行う。図 5.14 は曲げ 1 次から曲げ 10 次までの基準座標に対する推定結果である。実線がオブザーバーによる推定値であり，点線がシミュレーションによる目標値である。推定の計算を長くしても，推定結果に変化はなかったため，比較が明確なものとなるように，計算結果は 10(sec) までを示す。曲げ 5 次振動のみは，応答値と推定値の差が現れているが，その他の振動次数に関しては，オブザーバーによる状態推定は十分な精度で実現できていることが分かる。



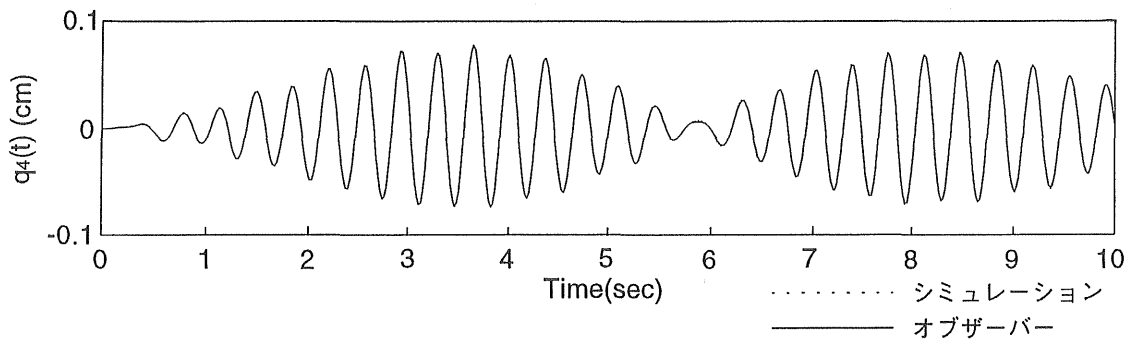
a) 曲げ1次振動



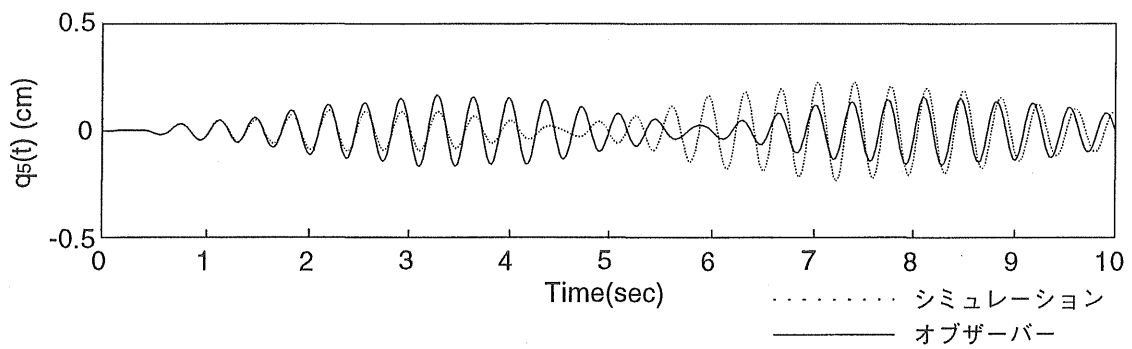
b) 曲げ2次振動



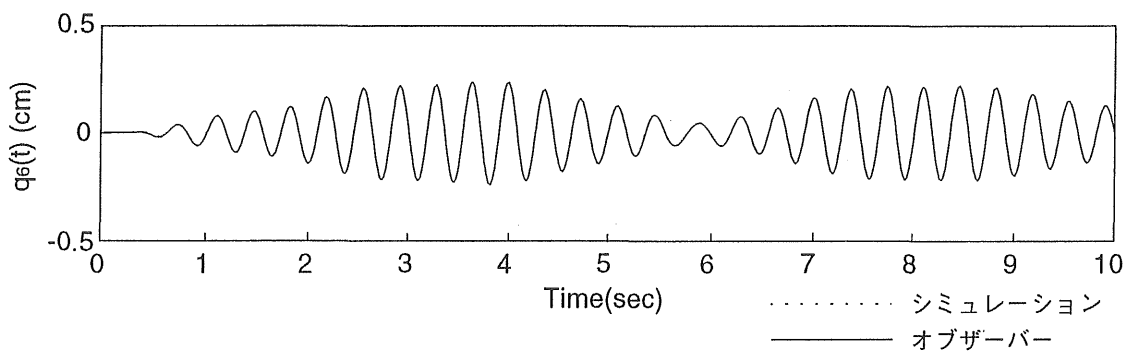
c) 曲げ3次振動



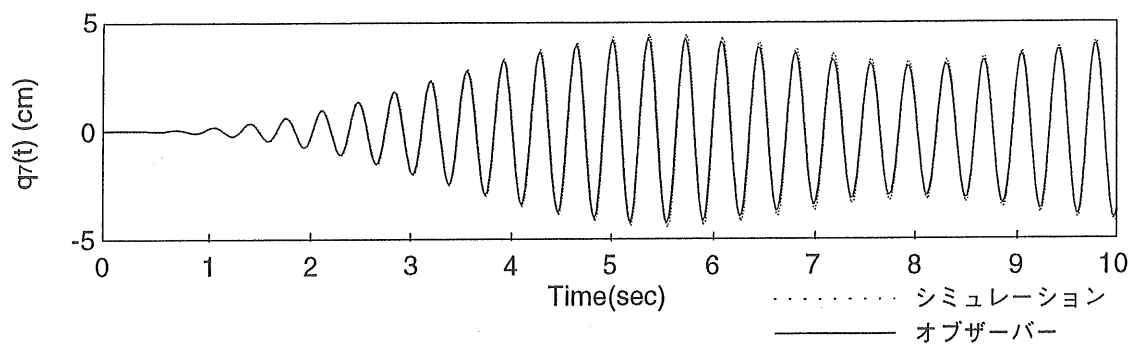
d) 曲げ4次振動



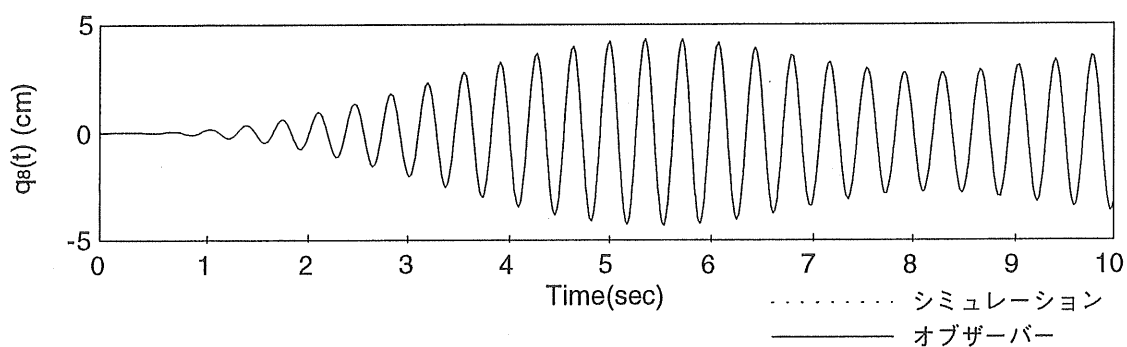
e) 曲げ5次振動



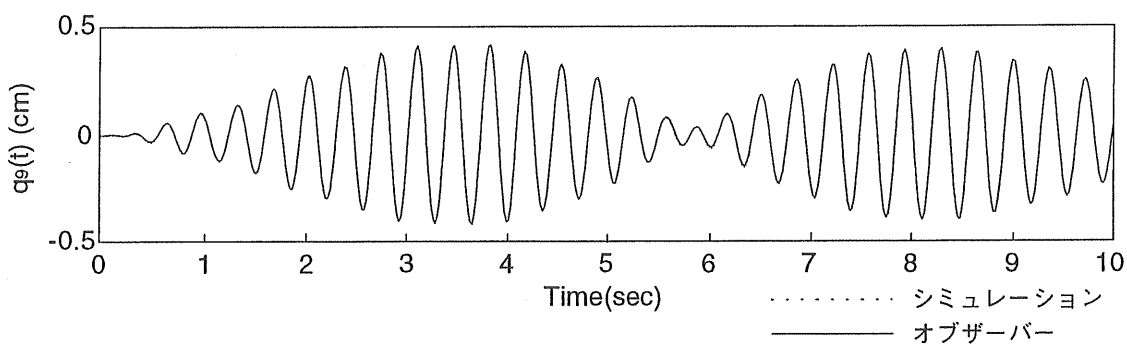
f) 曲げ6次振動



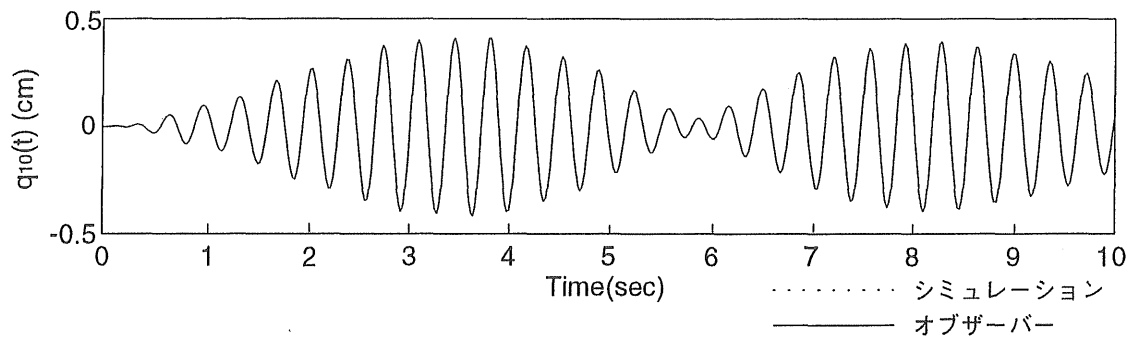
g) 曲げ7次振動



h) 曲げ8次振動



i) 曲げ9次振動



j) 曲げ10次振動

図 5.14 全次元オブザーバーによる
橋梁の各次振動の状態推定
(吊床版歩道橋)

5. 5 まとめ

本章では，各橋梁モデルに対し状態推定理論を適用し，数値シミュレーションでの推定より，状態推定理論の橋梁振動に対する有効性を検討した．得られた結果をまとめると次のようになる．

(1) プレートガーダー橋の梁モデルでの橋梁 - 動吸振器 - 車両系にカルマンフィルタを適用し状態推定を行った．カルマンフィルタは非定常理論および定常理論の二つの場合について考えた．その結果，橋梁および動吸振器の状態推定は，非定常カルマンフィルタ，定常カルマンフィルタ共に十分な推定精度が得られたが，僅かに非定常カルマンフィルタが優れたものになった．車両については，どちらを適用した場合でも推定値のレベルに若干の差が認められたが，振動数はほぼ一致しており，振動制御に適用する場合，実用上の問題はないものと考えられる．路面凹凸については，十分な推定はできなかった．しかし，振動制御を行うための状態方程式の制御力の項には，路面凹凸のパラメータは含まれていないため，この状態変

数を推定することはあまり重要ではない。以上の結果において、厳密には非定常カルマンフィルタの方が定常カルマンフィルタより優れた状態推定を行うことができたが、計算量の少ない、定常カルマンフィルタでも十分実用に耐えうるものと考えられる。

(2) プレートガーダー橋の有限帯板モデルでの橋梁 - 動吸振器 - 車両系にカルマンフィルタを適用し状態推定を行った。橋梁、動吸振器および車両の状態推定は、非定常カルマンフィルタ、定常カルマンフィルタ共に十分な結果となったが、車両に関して定常カルマンフィルタの場合、やや劣った結果になった。路面凹凸は、梁モデルの場合と同様に、十分な推定が実現できなかった。しかし、制御を行う上ではあまり影響がない。以上の結果より、実用上は計算が簡単な定常カルマンフィルタで十分なものと言えるが、梁モデルの場合に比べ、定常カルマンフィルタによる推定が、非定常カルマンフィルタよりも推定結果が劣ったものになった。

(3) 歩行外力が作用する吊床版歩道橋振動の状態推定に対し全次元オブザーバーを適用し、制御対象と考えられる曲げ振動の1次から10次までの状態推定を行った。曲げ5次振動において推定結果に若干の誤差が生じているが、それ以外の振動次数の応答の推定については、精度の良い推定結果が得られた。歩行外力が作用する吊床版歩道橋振動のような不確定な要素が少ない場合の状態推定では、オブザーバーを用いた場合でも状態推定が可能であることが確認できた。

参考文献

- 1) 岡林隆敏・吉村徹・加賀敏明：走行車両による単純桁橋振動のカルマンフィルタによる状態推定，構造工学論文集，Vol.42A, pp.723-730, 1996.4.
- 2) 岡林隆敏・加賀敏明・吉村徹・尾口慎也：単一車両が走行する道路橋の確率的制御理論による振動制御，土木学会論文集，1998.4.
- 3) 岡林隆敏・吉村徹・手塚勝・加賀敏明：道路橋交通振動における状態推定へのカルマンフィルタの適用，長崎大学工学部研究報告，Vol.25, No.45, pp.195-202, 1995.7.
- 4) 岡林隆敏・吉村徹・手塚勝・加賀敏明：カルマンフィルタによる道路橋交通振動の状態推定，第3回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B, pp.25-32, 1995.8.
- 5) 吉村徹・岡林隆敏・加賀敏明：走行車両による道路橋振動制御における状態推定に関する考察，土木学会橋梁交通振動コロキウム論文集 PART.B, pp.257-264, 1995.11.
- 6) 岡林隆敏・馬渡あかね・加賀敏明：MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の歩行者励起振動の解析と制御設計，構造工学論文集，Vol.43A, pp.693-702, 1997.3.
- 7) 岡林隆敏・木戸正敏・加賀敏明：未知入力オブザーバーを用いた多自由度系構造物の振動制御，第4回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集，日本機械学会，No.95-28, pp.267-270, 1995.7.
- 8) 岡林隆敏・加賀敏明・甲斐利彦：MATLAB言語による道路橋交通振動の解析，長崎大学工学部研究報告，Vol.26, No.46, pp.279-286, 1996.1.
- 9) 白石昌武：入門現代制御理論，啓学出版，1987.11.
- 10) 岩井善太・井上昭・川路茂保：オブザーバ，コロナ社，1988.10.

第 6 章 各種制御則による振動制御の数値解析

6. 1 はじめに

本章では，各橋梁モデルに対し第3章および第4章で定式化した各種の振動制御理論を適用し，これらの制御効果を比較検討することにより，適用した制御理論の橋梁振動に対する有効性^{1) 2) 3) 4) 5) 6)}を検討する．制御方法は，アクティブ制御とハイブリッド制御を考える．プレートガーダー橋の有限帯板モデルおよびトラスドランガー橋モデルに対してはLQ制御（確定論的制御理論）とLQG制御（確率論的制御理論）⁵⁾の比較を行い，実橋での振動制御の可能性についても検討する．LQG制御の有効性が確認できると，現実には計測不可能な車両の状態量を含むシステムの全状態量を推定しながら制御を行うことが可能になる．さらに，瞬時最適化理論を拡張した多段階制御理論の時変系振動に対する有効性を検討する．

歩行者による吊床版歩道橋振動は荷重の特徴を考えると，道路橋振動に比べ時変系の傾向や外力の不確定性の傾向が少ない．そこで，定常な制御則である最適レギュレータ理論およびオブザーバーによるアクティブ制御を適用し，その有効性を検討する．

6. 2 プレートガーダー橋の梁モデルにおける振動制御

6. 2. 1 数値シミュレーションの条件

梁モデルの場合の橋梁と車両の諸元は，カルマンフィルタによる状態推定で用いた表2.1と表5.2の値であるものとして，各種制御理論によるアクティブ制御とハイブリッド制御における振動制御の有効性を検討する．

走行車両は大型ダンプトラックを想定するため，支間長40.0(m)の橋

梁では1次の固有振動数が，車両の固有振動数と最も接近する．そこで，橋梁の1次振動の応答が最も卓越すると考えられるので，数値シミュレーションでは橋梁の高次振動を無視して，1次振動のみを考える．

6. 2. 2 アクティブ制御

ここでは，橋梁に対しアクチュエータにより直接制御力を加える制御をアクティブ制御と呼ぶ．プレートガーダー橋の梁モデルについて，アクティブ制御の制御理論に定常最適レギュレータ制御理論，非定常最適レギュレータ制御理論，瞬時最適化制御理論（Ⅰ）（Ⅱ）およびスライディングモード制御理論を適用した場合の振動制御の有効性を検討する．これらの場合の橋梁支間中点における変位応答を図6.1に示す．非制御の変位応答を点線，制御を行った場合の変位応答を実線で示す．それぞれの制御理論を橋梁振動のアクティブ制御に適用した場合の制御力を図6.2に示す．ここでは，各制御理論による制御効果を比較するために，制御力が同程度になるように規準化する．

数値シミュレーションの結果，図6.1の橋梁支間中点における変位応答を見ると，各制御理論とも応答のレベルは低下しており，制御が効いていることが分かる．各制御理論による振動制御効果を比較すると，d)の瞬時最適化制御理論（Ⅱ）およびe)のスライディングモード理論が他の制御理論に比べ優れた結果になっている．特に，e)のスライディングモード理論では，1.0~1.5(sec)以外の時刻において，他の制御理論に比べかなり良い結果になっている．これら以外の制御理論においては大きな差は認められない．c)d)に示した瞬時最適化制御理論（Ⅰ）および瞬時最適化制御理論（Ⅱ）を比較すると，

車両の位置が原因で非定常性が問題になる前半時間と後半時間において、時変系の特性をより考慮した瞬時最適化制御理論（Ⅱ）が良い結果になることが確認できる。なお、e)のスライディングモード理論における振動制御では、1.8~2.3(sec)付近においてスライディングモード理論特有の直線的で非振動的な制御が実現されている。この時刻において、スライディングモード理論の滑り状態が実現されているものと推測できる。

図6.2の制御力の波形を見ると、e)のスライディングモード理論による制御力が特徴的なものとなっているが、これは、制御力の最大値を1.3(tonf)になるように制限を加えているためである。また、

(3-90)式のフィードバックゲインを用いて、制御力を連続的に切り換えることにより、スライディングモード理論における最大の弱点とされているチャタリング現象の防止に成功していることが分かる。

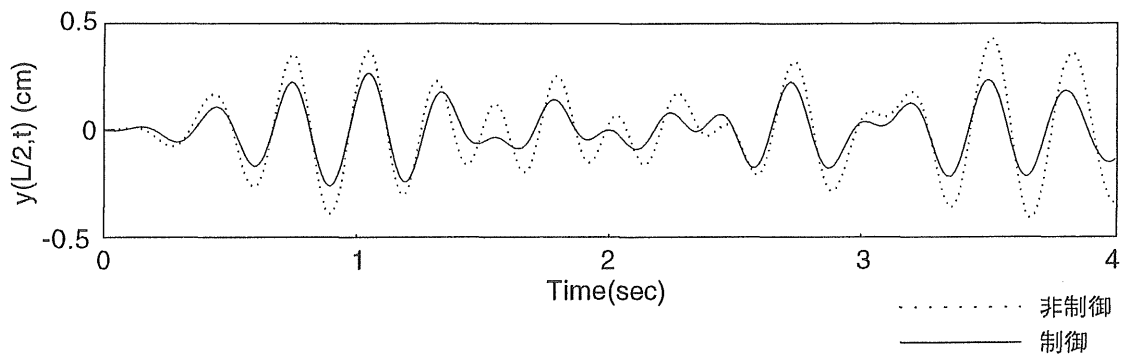
図6.3にスライディングモード理論の切換関数 σ の波形を示す。 σ の値がゼロ点付近にあるときが、スライディングモード理論の滑り状態になっていることを示すもので、先に変位応答について述べた直線的な制御が行われている時刻とほぼ一致しており、滑り状態の実現が確認できる。この時刻において、橋梁の変位応答が、切換超平面の交線近傍をスライドしていることを示している。

以上で実施したプレートガーダー橋の梁モデルに関する各種の数値シミュレーションで得られた結果を表6.1にまとめる。なお、同表では、比較のための数値指標として橋梁の変位応答については最大値、標準偏差、また、制御力については最大値で表示する。走行車両による道路橋振動では、不規則な外力が作用するため、変位応答の標準偏差による各制御理論の比較がやや有利である。

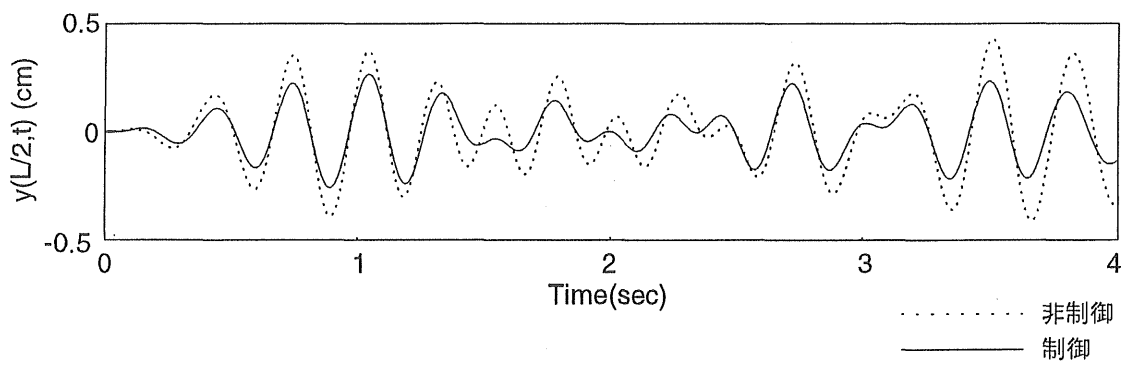
同表から、変位応答の最大値および標準偏差の値は、アクティブ

制御 5 種類いずれの場合も非制御の場合より小さい値を示しており、アクティブ制御が橋梁の振動制御に有効であることが分かる。

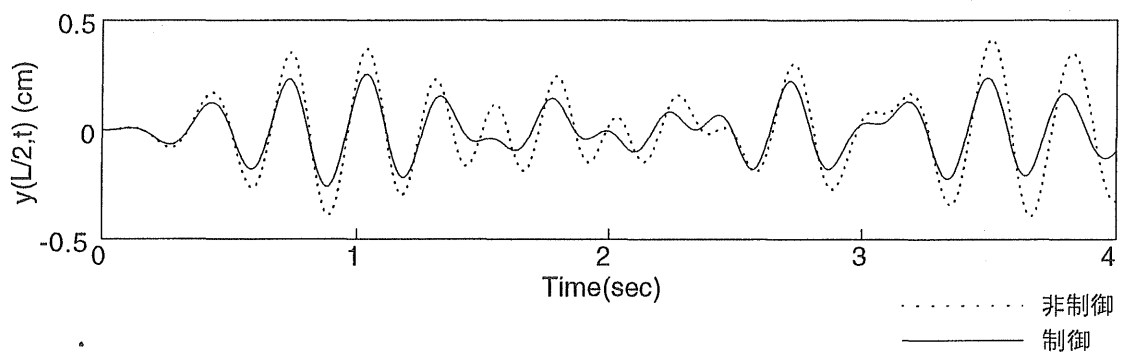
5 種類のアクティブ制御の効果を橋梁変位応答の最大値で比較すると、瞬時最適化制御理論 (Ⅱ) の場合が良い結果を得ており、また、標準偏差の比較では、瞬時最適化制御理論 (Ⅱ) およびスライディングモード理論の場合が良い結果を示している。以上の比較より、プレートガーダー橋の梁モデルにおけるアクティブ制御では、時変系の振動制御に優れた瞬時最適化制御理論 (Ⅱ) やスライディングモード理論が有利となることが確認できる。



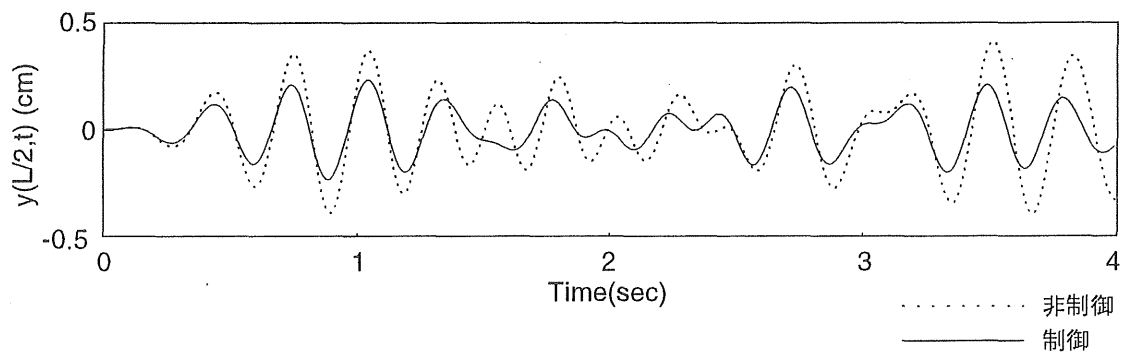
a) 定常最適レギュレータ制御



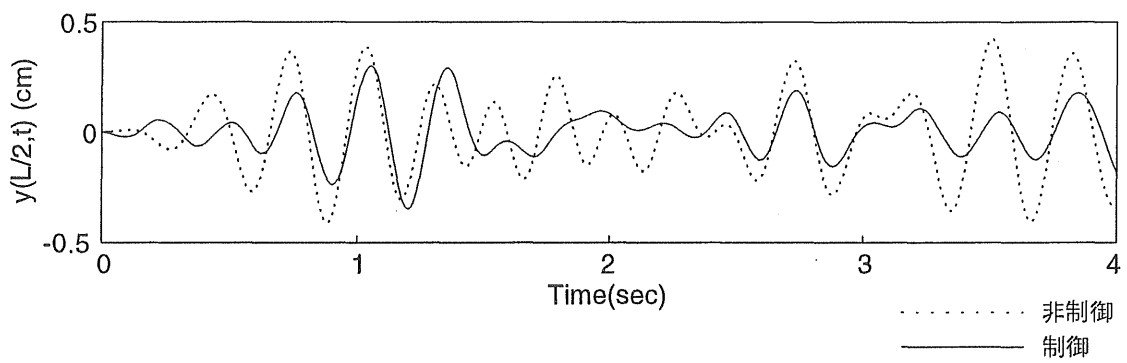
b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御 (1)

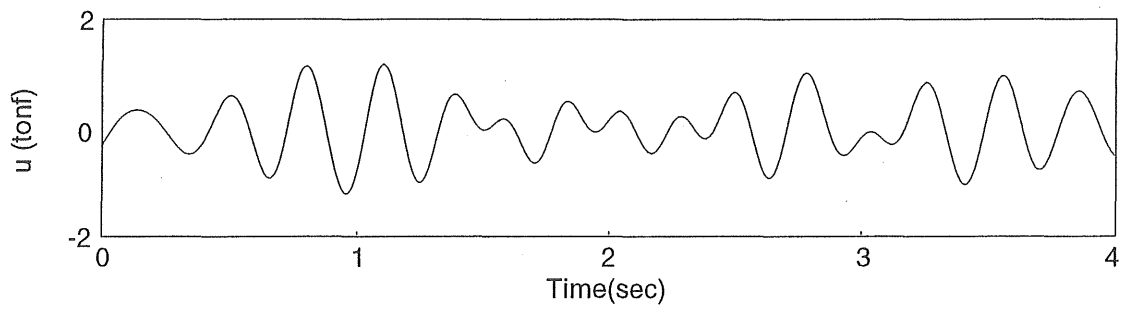


d) 瞬時最適化制御 (2)

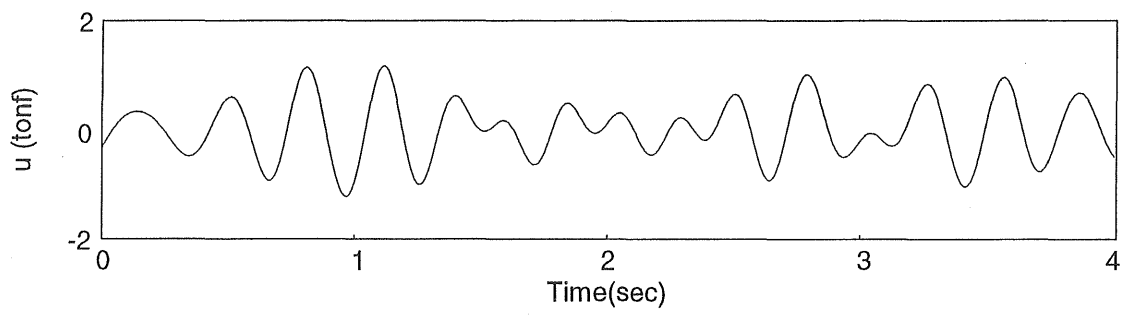


e) スライディングモード制御

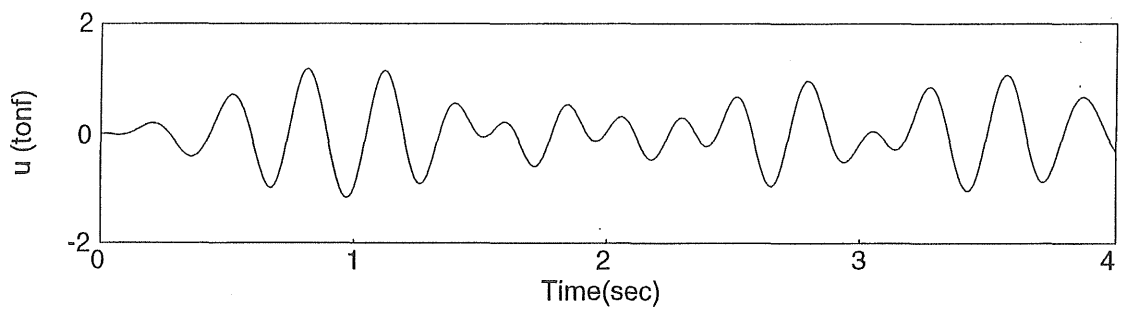
図 6.1 各制御理論による橋梁の変位応答
(梁モデル, アクティブ制御)



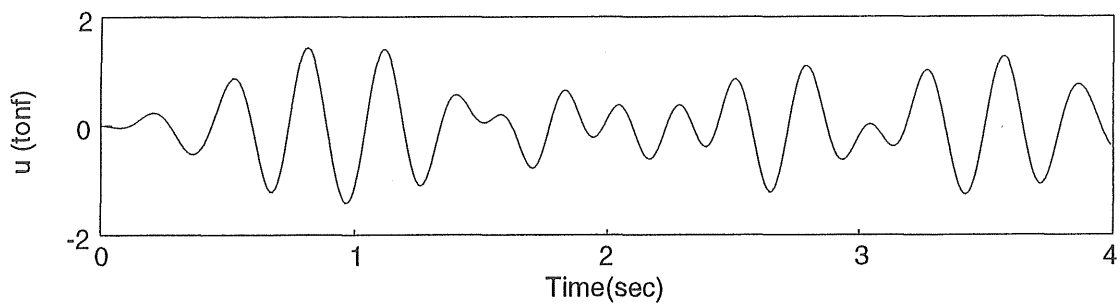
a) 定常最適レギュレータ制御



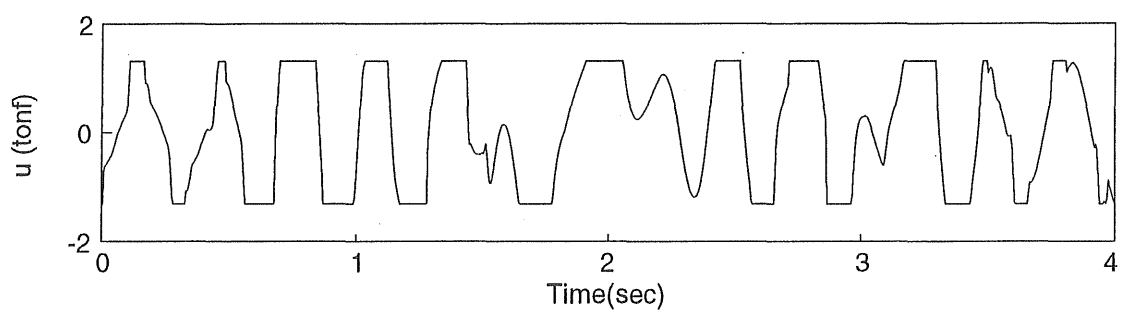
b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御 (1)



d) 瞬時最適化制御 (2)



e) スライディングモード制御

図 6.2 各制御理論における制御力
(梁モデル, アクティブ制御)

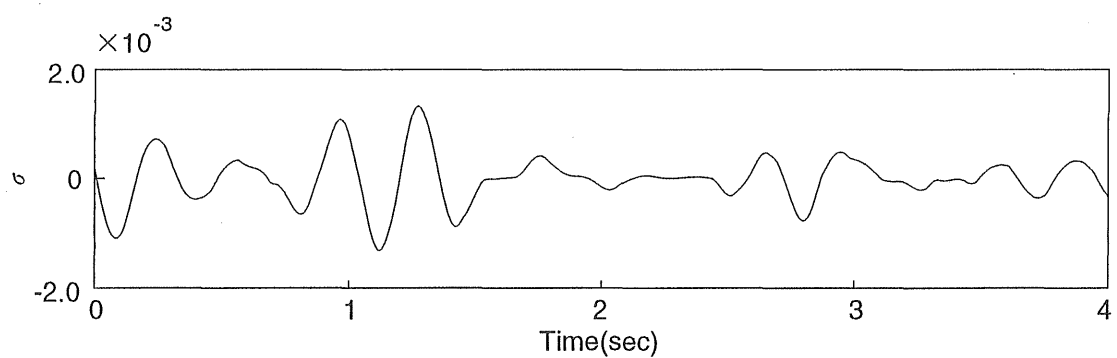


図 6.3 スライディングモード理論における切換関数
(梁モデル, アクティブ制御)

6. 2. 3 ハイブリッド制御

現実的な制御を考え，アクチュエーターのみで制御力を作用させるだけでなく，動吸振器に制御力を加えるハイブリッド制御を適用した場合の振動制御の有効性について検討する．動吸振器の設計法としては，最適レギュレータ制御の場合は，古典的な方法を用いる．瞬時最適化理論を適用した場合は，車両の荷重による橋梁の固有振動数の変化を考慮し動吸振器の振動数を調整する⁷⁾．また，スライディングモード理論における動吸振器の最適設計には， H_{\max} 法⁸⁾を用いる．この設計法は，橋梁に動吸振器を設置した場合，数値計算により橋梁振動の周波数伝達関数の最大値を最小化する設計法である．以上の設計法により求めた動吸振器の最適パラメータの諸元を表6.2に示す．これらの設計法で求められた動吸振器のパラメータには，特に大きな差異は見られない．

表6.2 動吸振器(TMD)の最適パラメータ (梁モデル)

	最適レギュレータ 理論	瞬時最適化理論	スライディング モード理論
質量比	1/50		
固有振動数(Hz)	2.83	2.29	2.29
減衰定数	0.12	0.12	0.14

ハイブリッド制御による制御効果を確認するために，図6.4に動吸振器のみによるパッシブ制御を橋梁振動に適用した場合の，橋梁支間中点における変位応答を示す．動吸振器の最適パラメータの値は，最適レギュレータ理論で用いた表6.2と同じで，古典的設計法により求めた値である．図6.4において，点線が非制御の場合を表し，実線が動吸振器を設置した場合を表す．数値シミュレーションの結果，僅かではあるがパッシブ制御による制御効果が表れている．しかし，十分な制御効果が得られていないため，動吸振器に制御力を加えるハイブリッド制御を検討する．

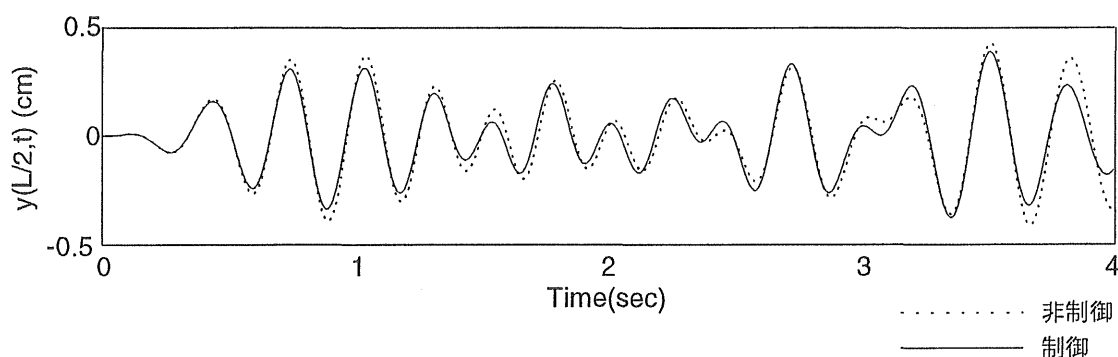


図 6.4 パッシブ制御による橋梁の変位応答

図6.5に定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論，瞬時最適化理論（Ⅰ）（Ⅱ）およびスライディングモード理論を橋梁振動のハイブリッド制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を示す．非制御の場合が点線，ハイブリッド制御の場合が実線である．図6.6にはそれぞれの制御理論を用いた場合の制御力を示す．各制御理論を比較できるようにするため，制御力が同程度になるように規準化した．図6.7はスライディングモード理論における切換関数である．また，図6.8にハイブリッド制御および動吸振器の

みのパッシブ制御時における動吸振器の動きを，それぞれ実線と点線で示す．

数値シミュレーションの結果，図6.5の変位応答の波形によると，各制御理論共に応答のレベルは低下しており，制御が効いていることが分かる．図6.4に示した動吸振器のみによるパッシブ制御とハイブリッド制御を行った場合の制御効果の比較では，これらの波形より明らかにハイブリッド制御の方が良い結果となっていることが分かる．プレートガーター橋の梁モデルでは，パッシブ制御に比べハイブリッド制御が有利となることが確認できる．

次に，各制御理論によるハイブリッド振動制御の効果を比較すると，b)の非定常最適レギュレータ理論を適用した場合の制御則が最も良い結果になっている．しかし，非定常最適レギュレータ理論は，制御力を逆算する必要があるために実用的な制御理論とは言えない．しかし，本論文では，非定常最適レギュレータ理論を時変系制御の一つの指標として，他の制御理論を用いた場合との比較に用いる．a)の定常最適レギュレータ理論とd)の瞬時最適化理論（Ⅱ）およびe)のスライディングモード理論を適用した制御則では，同程度の応答レベルの低下が認められる．定常制御理論による制御則では，リカッチ方程式を解くことにより制御則が得られる．しかし，瞬時最適化理論においては，このような処理が必要ではない．この点では，瞬時最適化理論が有利である．また，瞬時最適化制御理論（Ⅰ）と（Ⅱ）を比較すると，時変系の特性を強く影響させた制御理論である瞬時最適化理論（Ⅱ）を適用した場合が，瞬時最適化理論（Ⅰ）を適用した場合より応答のレベルは低下しており，アクティブ制御での比較より大きな差となっている．この原因として，動吸振器の設置により，橋梁，動吸振器および車両による連成振動のために非定常性が強まり，これに時変系の特性を多く持たせた瞬時最適化理

論（Ⅱ）が効果的に働いたものと考えられる。

スライディングモード理論では，車両が橋梁に進入した後の0.6~0.8(sec)付近において，スライディングモード理論特有の非振動的な制御が実現されている．図6.7の切換関数 σ の波形も同時刻でゼロ点付近で推移しており，非振動的な制御となったのは，スライディングモード理論の滑り状態が実現されたためであることが分かる．また，図6.6e)のスライディングモード理論における制御力の波形は連続的に変化しており，チャタリングが防止できていることを示している．図6.8のそれぞれの制御時における動吸振器の動きを見た場合，パッシブ制御に比べハイブリッド制御における動吸振器の変動が大きくなっており，ハイブリッド制御によって動吸振器がより有効に作用していることが分かる．

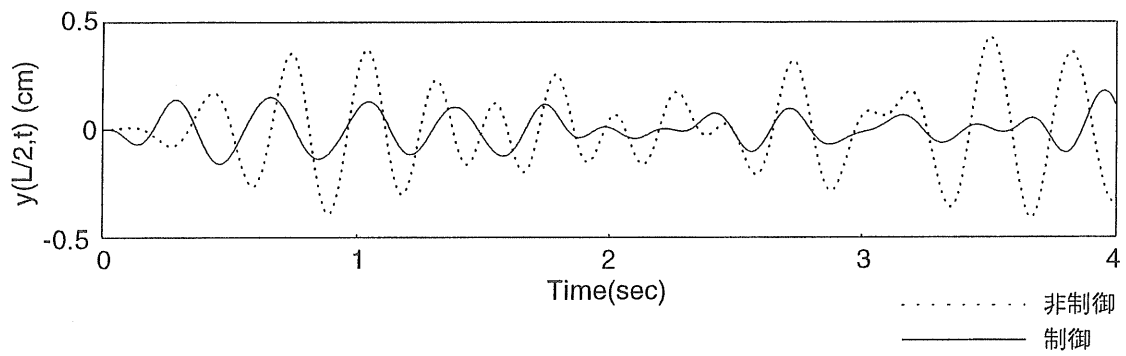
図6.1に示したアクティブ制御を行った場合とハイブリッド制御を行った場合の制御効果の比較では，ハイブリッド制御の方が有利となることが分かる．

パッシブ制御およびハイブリッド制御における数値シミュレーションで得られた結果を橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値で整理して，先のアクティブ制御の場合と併記して表6.1に示す．

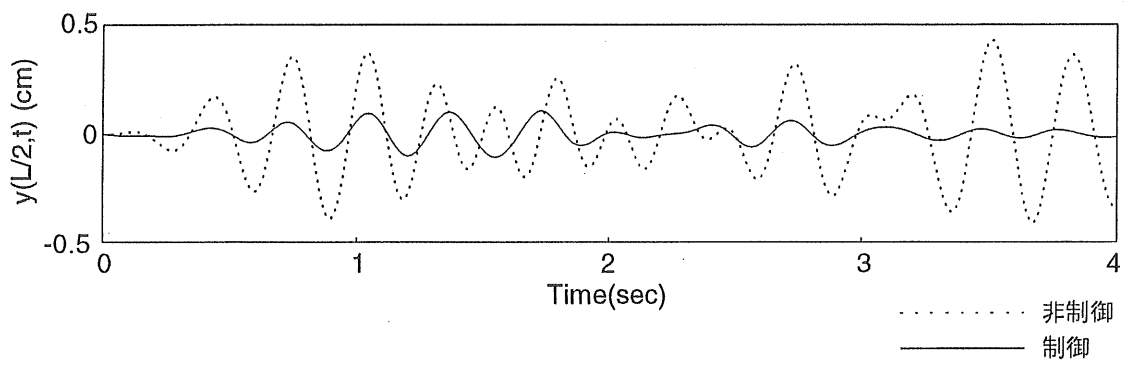
橋梁変位応答の最大値と標準偏差により，非制御およびパッシブ制御に比べ，ハイブリッド制御に各制御理論を適用したすべての場合で良い制御効果が得られていることが分かる．また，ハイブリッド制御とアクティブ制御との比較では，瞬時最適化理論（Ⅰ）以外は，すべてハイブリッド制御が優れた結果になっている．プレートガーダー橋の梁モデルでは，パッシブ制御やアクティブ制御に比べハイブリッド制御が効果的であることが分かる．

次に，ハイブリッド制御時における各制御理論による振動制御効

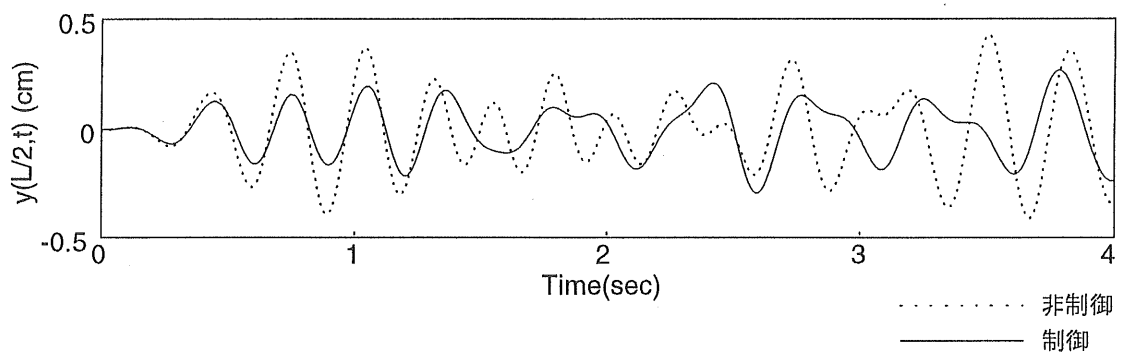
果の比較では，橋梁変位応答の最大値および標準偏差いずれを用いる場合でも，非定常レギュレータ理論が最も効果的な制御になっている．しかし，非定常最適レギュレータ理論は，制御力を逆算する必要があるため実用的な制御理論ではない．橋梁変位応答の標準偏差において，非定常レギュレータ理論に次いで制御効果の良い瞬時最適化理論（Ⅱ）が考えられる．以上の結果から，プレートガーダー橋の梁モデルにおけるハイブリッド制御では，時変系の制御に適した制御理論が有効であることが確認できる．



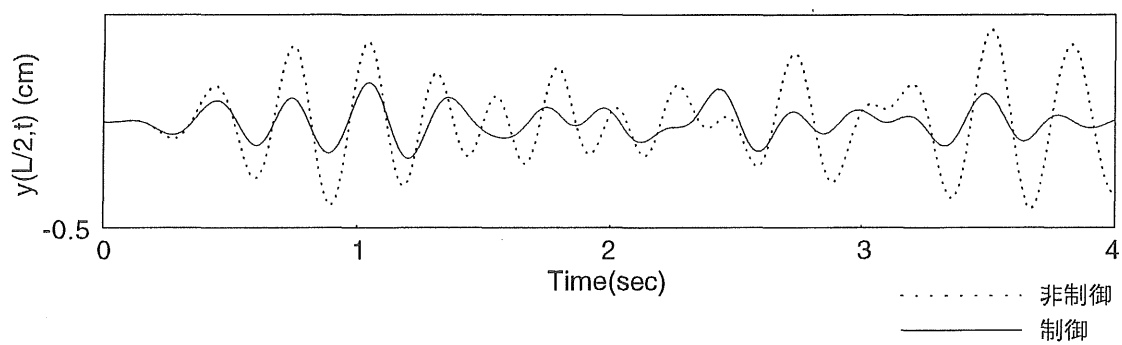
a) 定常最適レギュレータ制御



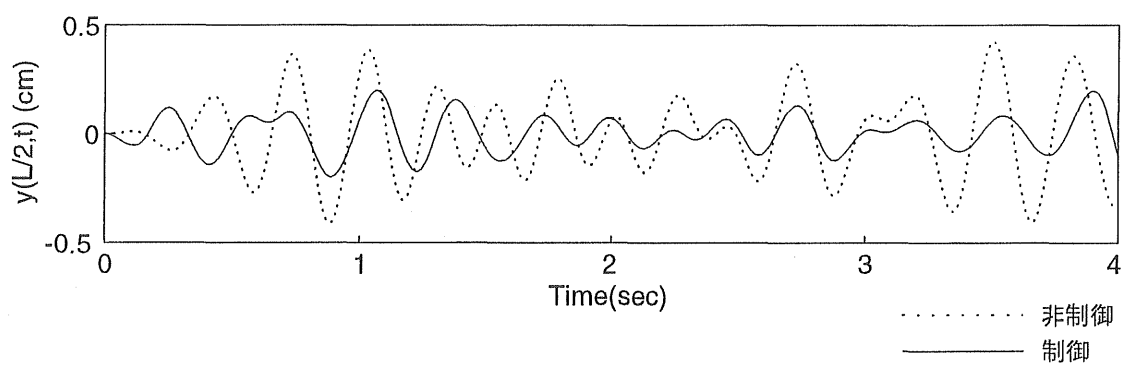
b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御 (1)

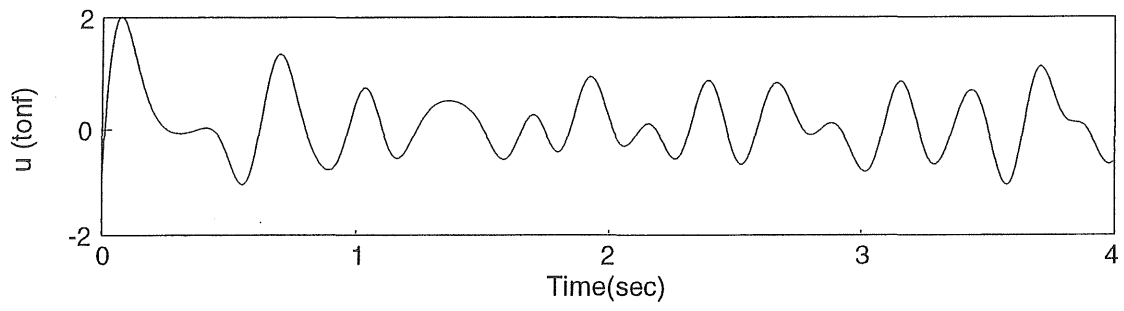


d) 瞬時最適化制御 (2)

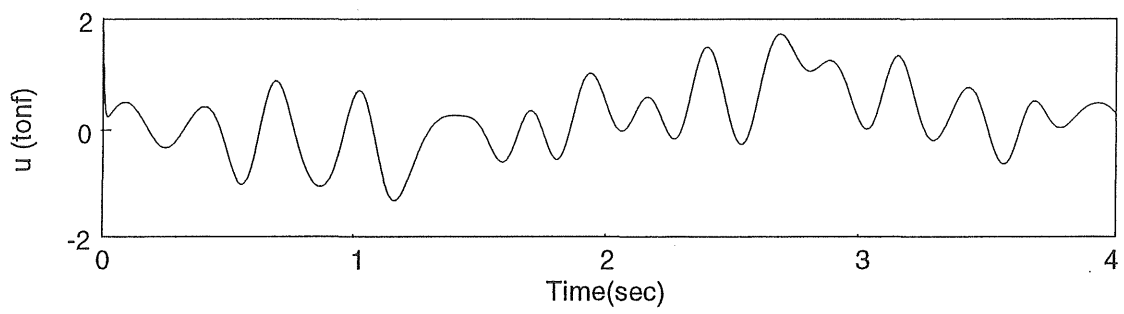


e) スライディングモード制御

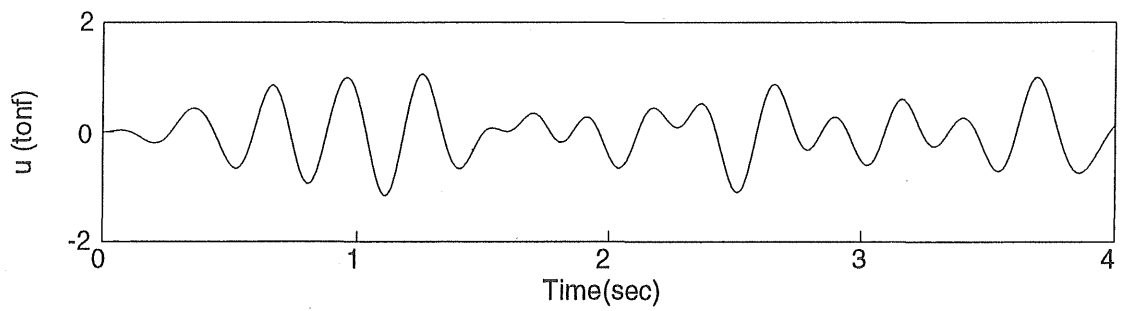
図 6.5 各種制御理論による橋梁の変位応答
(梁モデル, ハイブリッド制御)



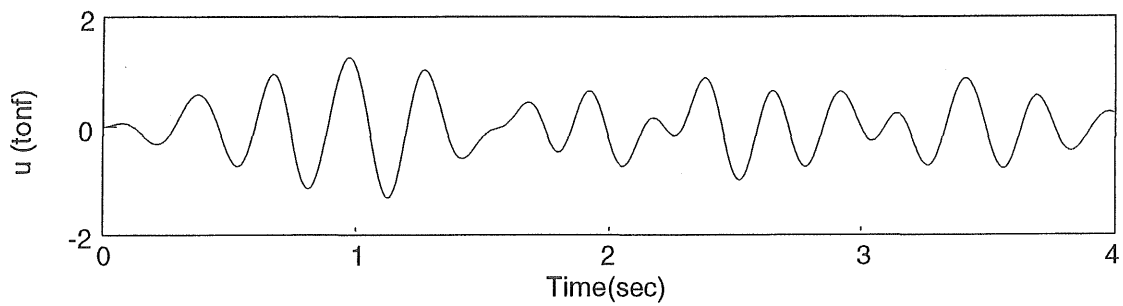
a) 定常最適レギュレータ制御



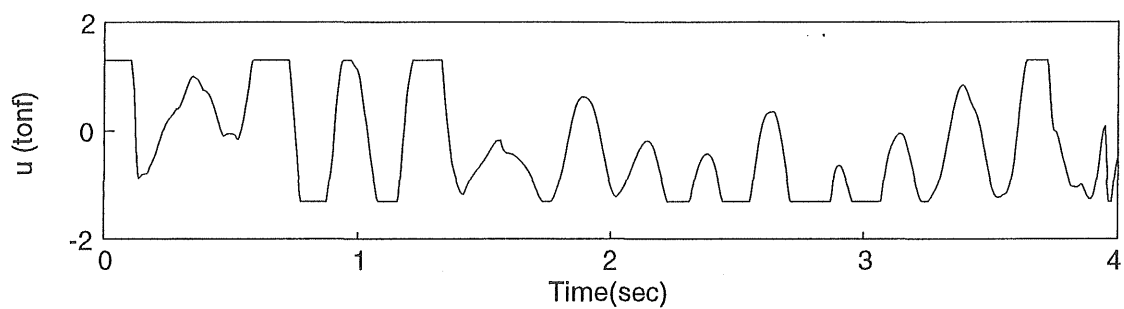
b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御 (1)



d) 瞬時最適化制御 (2)



e) スライディングモード制御

図 6.6 各制御理論における制御力
(梁モデル, ハイブリッド制御)

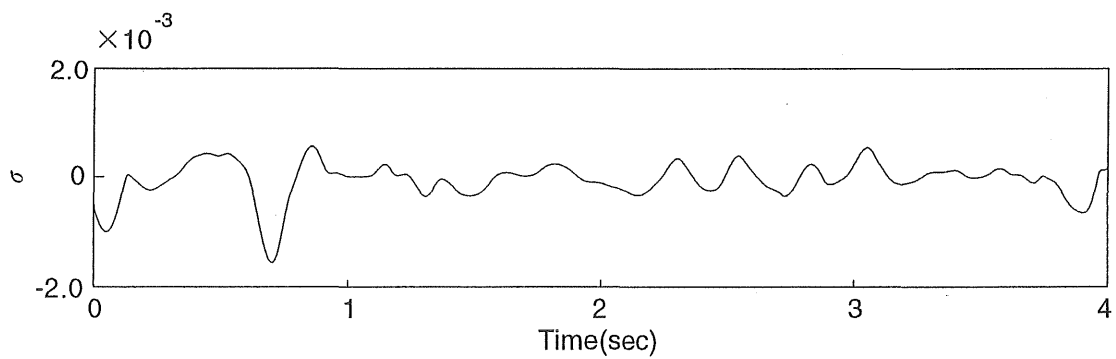
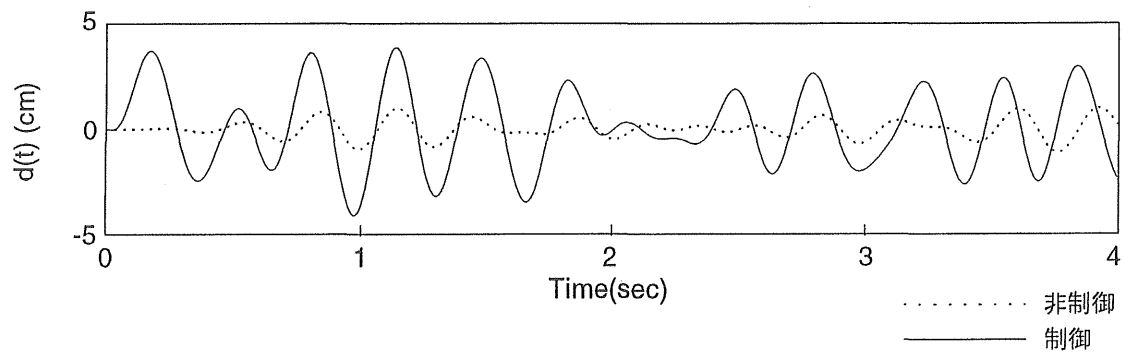
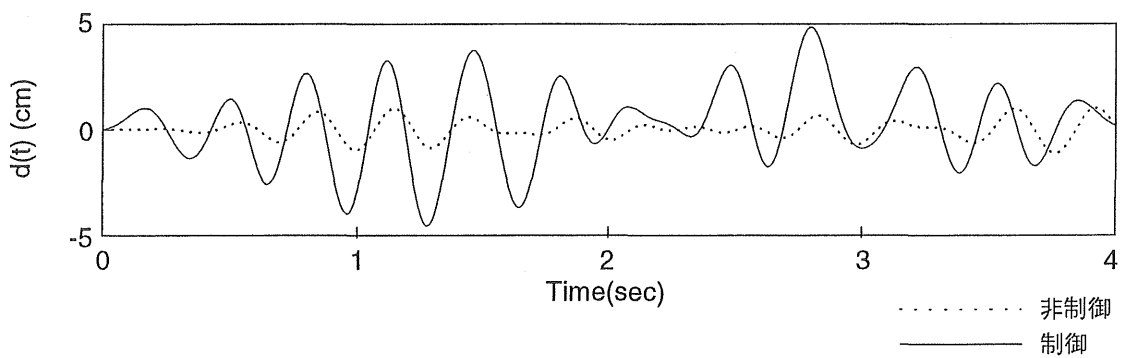


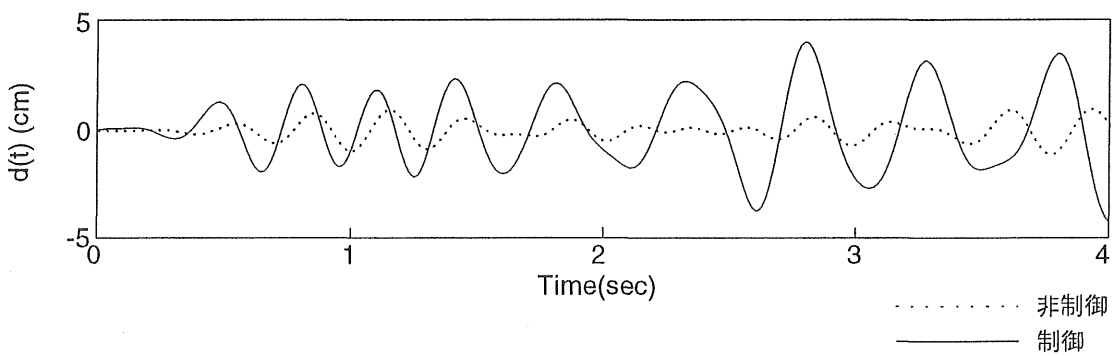
図 6.7 スライディングモード理論における切換関数
(梁モデル, ハイブリッド制御)



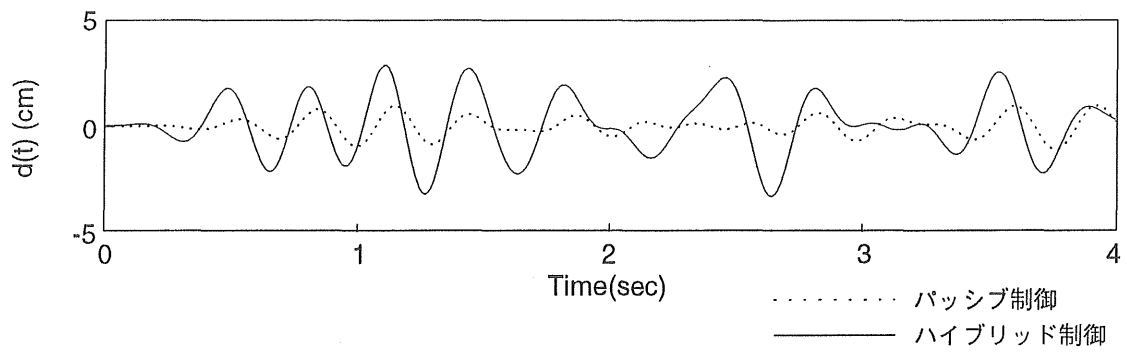
a) 定常最適レギュレータ制御



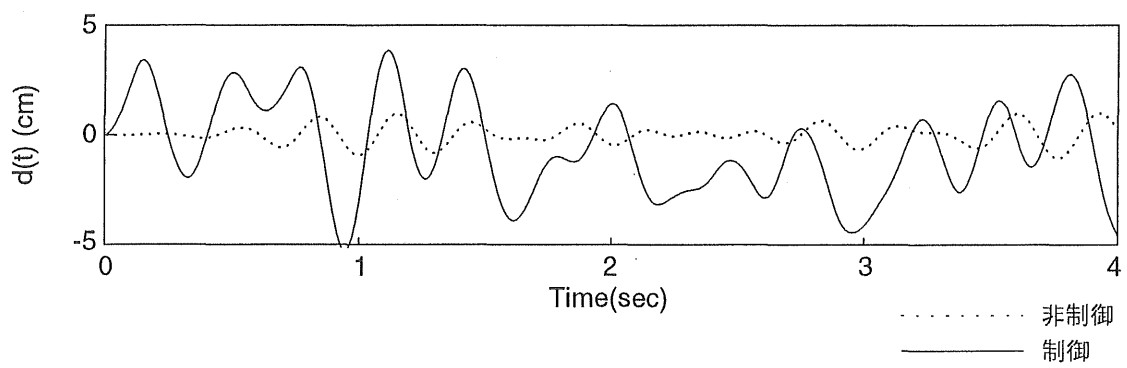
b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御 (1)



d) 瞬時最適化制御 (2)



e) スライディングモード制御

図 6.8 各種制御理論による動吸振器の変位応答
(梁モデル, ハイブリッド制御)

表 6.1 各制御理論による制御効果 (梁モデル)

			最適レギュレータ 制御		瞬時最適化 制御		スライディング モード制御
			定常	非定常	I	.II	
橋梁変位 (最大値) (cm)	非制御		0.4298				
	制御	パッシブ	0.3874				
		アクティブ	0.2656	0.2550	0.2591	0.2341	0.3446
		ハイブリッド	0.1794	0.1047	0.2940	0.1843	0.1989
橋梁変位 (標準偏差) (cm)	非制御		0.1864				
	制御	パッシブ	0.1686				
		アクティブ	0.1158	0.1125	0.1161	0.1048	0.1086
		ハイブリッド	0.0729	0.0423	0.1209	0.0719	0.0837
制御力 (最大値) (tonf)	アクティブ		1.2182	1.2038	1.1807	1.4381	1.3026
	ハイブリッド		2.0086	1.2128	1.1606	1.3077	1.3054

6. 3 プレートガーダー橋の有限帯板モデルにおける振動制御

6. 3. 1 数値シミュレーションの条件

プレートガーダー橋を有限帯板法によりモデル化した場合，各種制御理論によるアクティブ制御およびハイブリッド制御における橋梁のパラメータは，第2章の表2.2，表2.3および図2.4の値である．車両のパラメータは，梁モデルの場合と同じく表5.2の値を用いる．車両の速度は $v=10(m/sec)$ である．

6. 3. 2 アクティブ制御

橋梁振動にアクティブ制御を実施した場合の各制御理論の有効性について検討する．図6.9に定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論をアクティブ制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を，LQ制御とLQG制御について示す．それぞれの場合について，非制御を点線，LQ制御を鎖線，LQG制御を実線で示す．LQG制御を行った場合の応答を比較し，各制御理論における制御効果について検討を行う．また，LQ制御およびLQG制御を比較することにより，現場において実用的なLQG制御の可能性について検討する．プレートガーダー橋の梁モデルにおける数値シミュレーションで瞬時最適化理論は，制御理論（Ⅰ）よりも制御理論（Ⅱ）（拡張した瞬時最適化理論）において効果的な制御を実現できることが明らかになった．そこで，プレートガーダー橋の有限帯板モデルにおいて瞬時最適化理論は，制御理論（Ⅱ）を採用する．これ以降の数値シミュレーション解析においても，瞬時最適化理論については，同様に制御理論（Ⅱ）を用いる．また，制

御則に定常最適レギュレータ理論を適用する場合の状態推定には，定常カルマンフィルタを組み込んだLQG制御，制御則に非定常最適レギュレータ理論を適用する場合の状態推定には，非定常カルマンフィルタを組み込んだLQG制御および，瞬時最適化理論を適用する場合の状態推定には，離散系カルマンフィルタを組み込んだLQG制御を構成する．

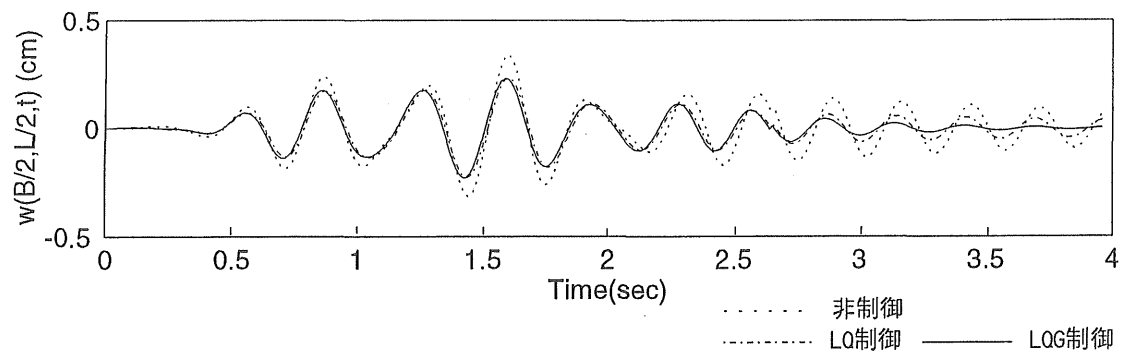
図6.10には，それぞれの制御理論に対応する制御力を示す．各制御理論を比較できるようにするため制御力の最大値を2(tonf)で一定となるように調整する．数値シミュレーションの結果，図6.9より各制御理論とも応答のレベルは低下しており，制御が効いていることが分かる．しかし，LQG制御に限定し，3種類の制御理論による振動制御の効果を比較すると，これらの間には顕著な差は認められない．この条件では，非定常最適レギュレータ理論や瞬時最適化理論などの非定常理論を用いなくても，定常最適レギュレータ理論で同程度の効果が表れている．

LQ制御では，車両の状態量を含む全状態量が既知であるものとしているが，制御を行う実際の現場でこれを計測することは不可能である．これに対し，LQG制御では，全状態量を橋梁上の1点の観測値よりカルマンフィルタで推定しながら制御を行うため，この制御方法は実用的なものと言える．a) b) の定常レギュレータ制御と非定常レギュレータ制御に定常および非定常の連続系カルマンフィルタを組み込んだLQ制御およびc) の瞬時最適化制御に離散系カルマンフィルタを組み込んだLQG制御は，それぞれのLQ制御とほぼ一致した制御効果になっている．しかし，c) の離散系カルマンフィルタを組み込んだ瞬時最適化制御の場合がよりその傾向が大きく，離散系カルマンフィルタの精度の良さが確認できる．離散系カルマンフィルタを組み込んだLQG制御は，全状態量の推定に有効であり，実用

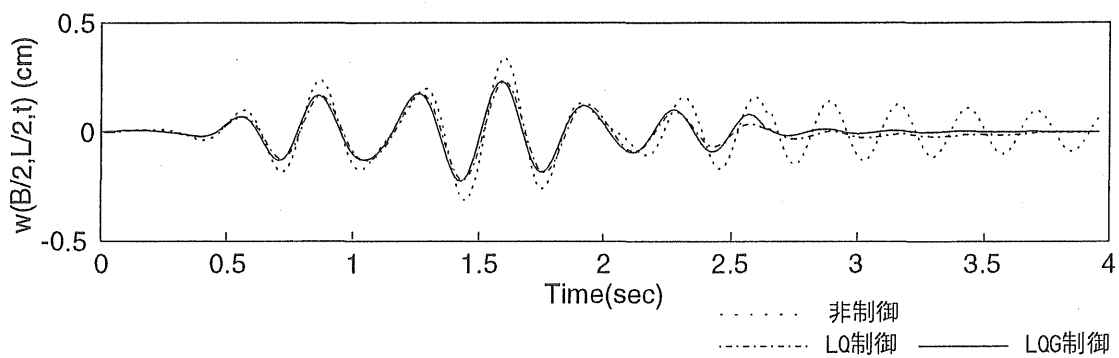
的な制御理論であると言える．以上の計算結果より，プレートガーダー橋の有限帯板モデルにおけるLQG制御の振動制御に対する可能性が確認できる．

以上の数値シミュレーションで得られた結果を表6.3にまとめ，非制御の場合と各制御理論をアクティブ制御に適用した場合における橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を示す．アクティブ制御はLQG制御の場合を示す．

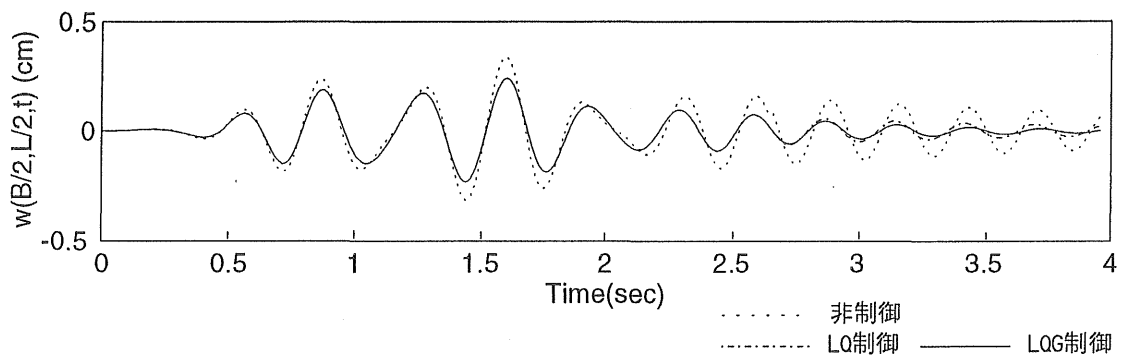
橋梁変位応答の最大値と標準偏差により，非制御に比べアクティブ制御に各制御理論を適用したすべての場合で，より有効な制御を実現できていることが確認できる．しかし，各制御理論による差は僅かなものである．



a) 定常最適レギュレータ制御

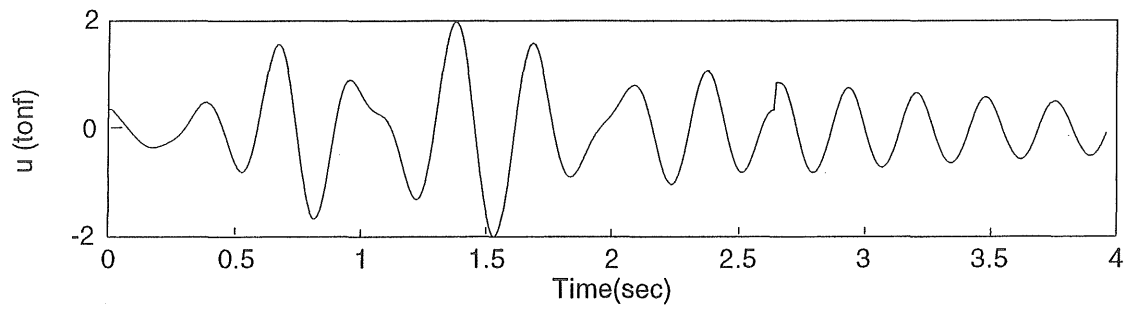


b) 非定常最適レギュレータ制御

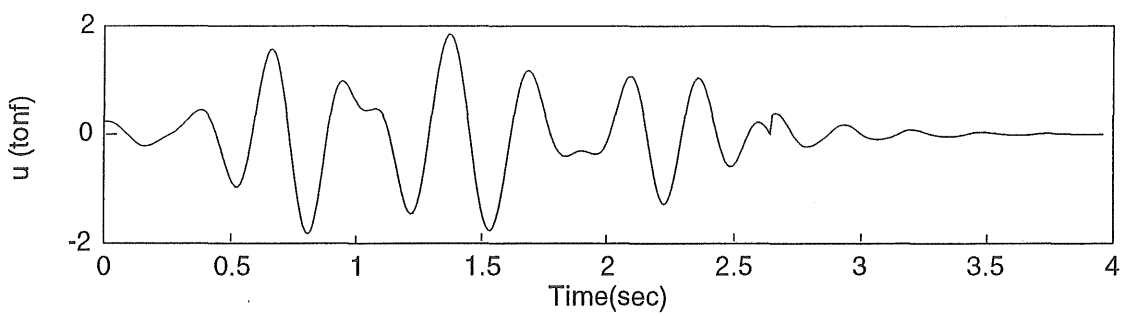


c) 瞬時最適化制御

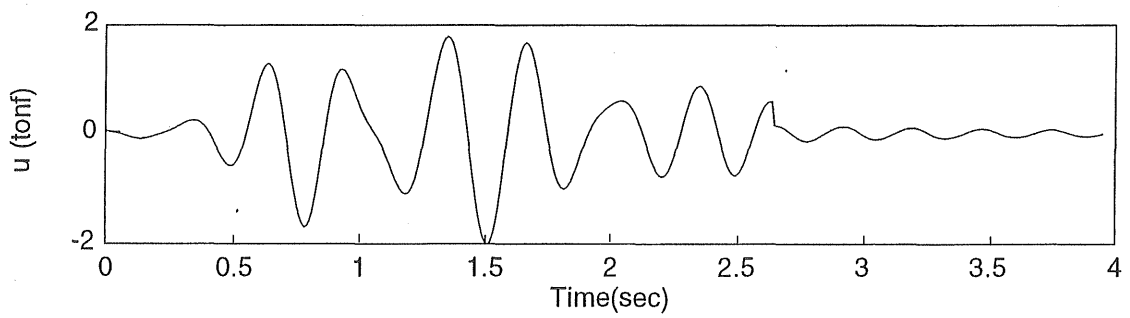
図 6.9 各制御理論による橋梁の変位応答
(有限帯板モデル, アクティブ制御)



a) 定常最適レギュレータ制御



b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御

図 6.10 各制御理論における制御力
(有限帯板モデル, アクティブ制御)

6. 3. 3 ハイブリッド制御

橋梁振動にハイブリッド制御を実施した場合の各制御理論の有効性について検討を行う。動吸振器の最適パラメータの設計法としては、不規則振動論により、着目点の変位応答の最大値を最小化する H_2 ノルム最適設計⁸⁾の手法を用いる。この設計法により、動吸振器の最適パラメータを求める。この諸元を表6.4に示す。図6.11にパッシブ制御を橋梁振動に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を示す。この応答によると梁モデルの場合よりは若干良い制御効果となっているが、十分な制御とは言えない。そこで、この動吸振器に制御力を加えるハイブリッド制御を考える。

表 6.4 動吸振器(TMD)の最適パラメータ (有限帯板モデル)

質量比	1/50
振動数 (Hz)	2.69
減衰定数	0.07

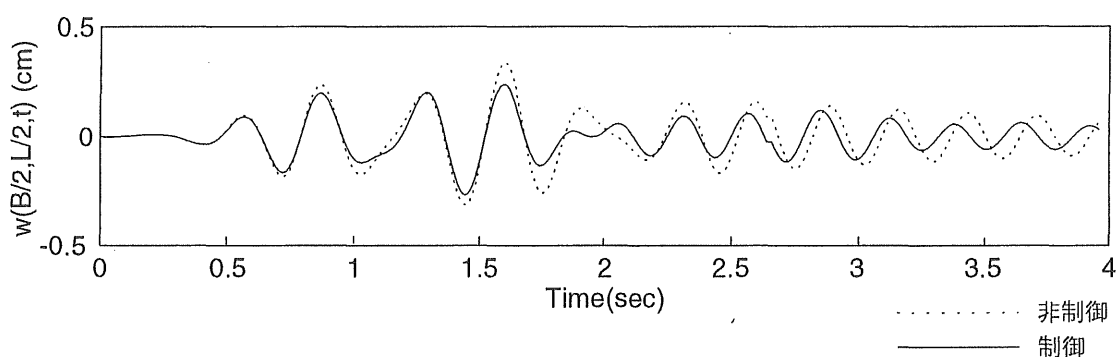


図 6.11 パッシブ制御による橋梁の変位応答
(有限帯板モデル)

図6.12に定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論および，瞬時最適化理論をハイブリッド制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答をLQ制御およびLQG制御について示す．それぞれの場合について，非制御を点線，LQ制御を行ったものを鎖線，LQG制御を行ったものを実線で示す．LQG制御に限定し，各理論による応答波形を比較することにより，それぞれの理論による振動制御効果について考察する．また，各理論のLQ制御およびLQG制御を比較し，カルマンフィルタによる全状態量の推定の精度を調べ，現場における制御の可能性を検討する．

図6.13は，それぞれの制御理論に対応する制御力である．各制御理論を比較するため制御力の最大値を $I(tonf)$ で一定となるように規準化している．アクティブ制御の半分の制御力である．図6.14には，各制御理論によりハイブリッド制御を行ったときの動吸振器の動きを示す．それぞれの場合において，パッシブ制御を行ったときの動吸振器の動きを点線，LQ制御を行ったものを鎖線，LQG制御を行ったものを実線で示す．

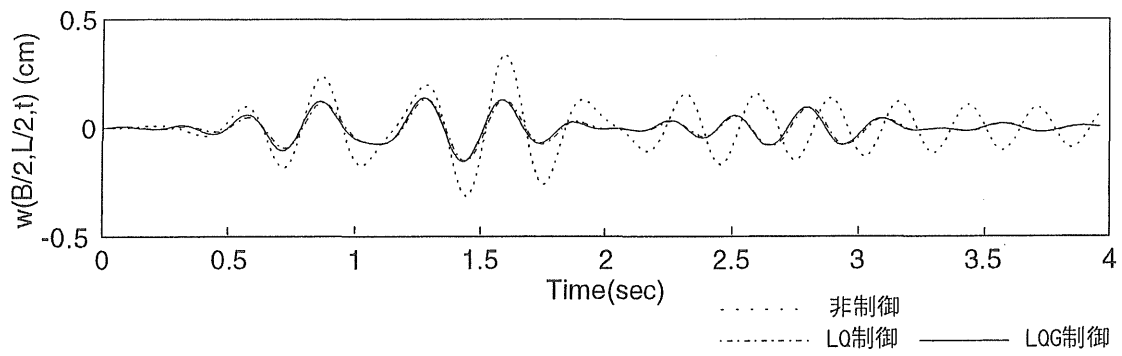
数値シミュレーションの結果，図6.12より各制御理論とも応答のレベルは，図6.11のパッシブ制御の場合に比べ明らかに低下しており，ハイブリッド制御の有効性が分かる．LQG制御に限定し，3種の制御理論による制御効果を比較すると，瞬時最適化理論が良い結果になっている．橋梁振動にハイブリッド制御を適用した場合，動吸振器を設置していることにより，橋梁，動吸振器および車両による連成振動のために非定常性が強まる．橋梁振動にアクティブ制御を適用する場合においては，非定常性を考慮しない定常性の制御理論であっても満足な制御効果を得ることができたが，ハイブリッド制御を適用する場合においては，非定常性を考慮した制御理論を用いる必要がある．

各制御理論によるLQG制御をLQ制御と比較すると，その変位応答の波形がほぼ一致している．しかし，c)の離散系カルマンフィルタを組み込んだ瞬時最適化制御の場合がよりその傾向が大きく，離散系カルマンフィルタの精度の良さが確認できる．現場において有利となるLQG制御の可能性が確認できる．また，アクティブ制御とハイブリッド制御の振動制御効果について比較する．図6.9および図6.12を見ると，アクティブ制御の半分の制御力でも，明らかにハイブリッド制御を適用した方がより効果的な制御になっている．

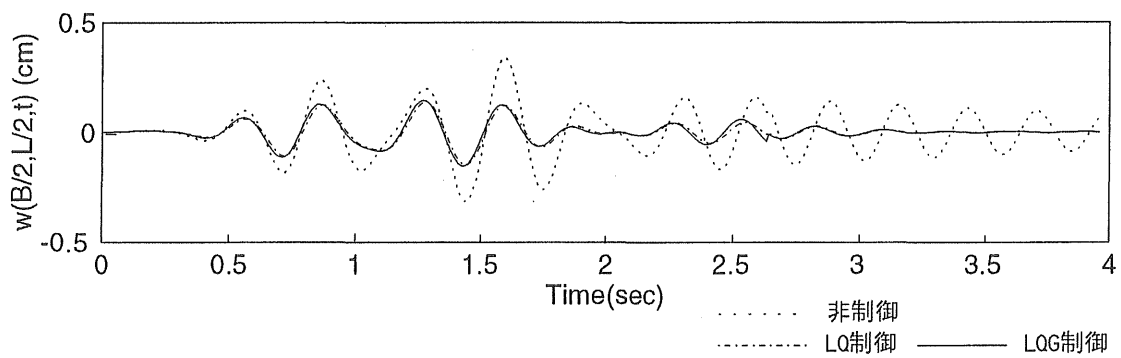
パッシブ制御およびハイブリッド制御における数値シミュレーションで得られた結果をアクティブ制御の場合と併記して表6.3に整理する．この表では，パッシブ制御および各制御理論をハイブリッド制御に適用した場合における橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を示す．ハイブリッド制御は，LQG制御の結果である．

橋梁変位応答の最大値と標準偏差により，非制御，パッシブ制御およびアクティブ制御に比べ，ハイブリッド制御に各制御理論を適用したすべての場合において，良い制御効果が得られていることが確認できる．プレートガーダー橋の有限帯板モデルでは，パッシブ制御やアクティブ制御に比べハイブリッド制御が効果的であることが分かる．

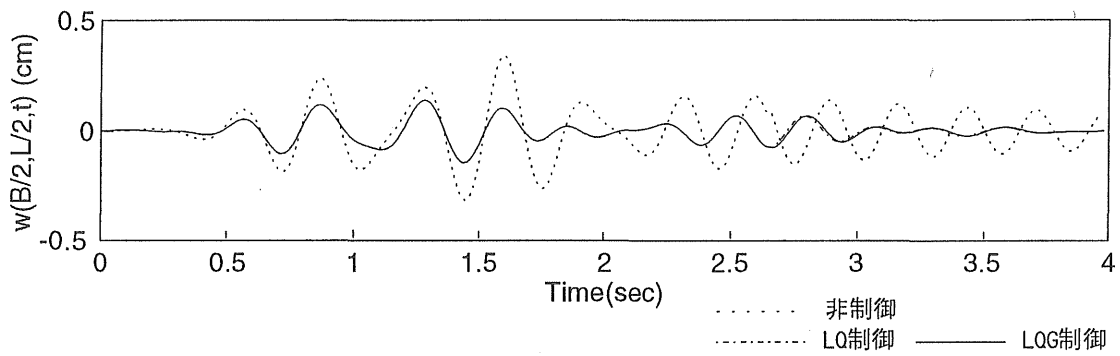
次に，ハイブリッド制御時における各制御理論による振動制御効果の比較では，橋梁変位応答の最大値に関して，瞬時最適化理論が最も効果的な制御になっている．橋梁変位応答の標準偏差による比較では，僅かではあるが非定常レギュレータ理論や瞬時最適化理論が良い結果になっている．プレートガーダー橋の有限帯板モデルに対するハイブリッド制御では，瞬時最適化理論等の非定常理論が有効となることが確認できる．



a) 定常最適レギュレータ制御

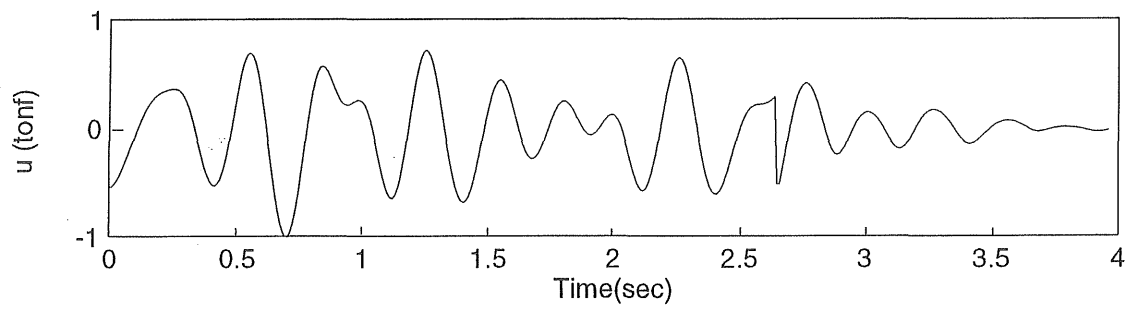


b) 非定常最適レギュレータ制御

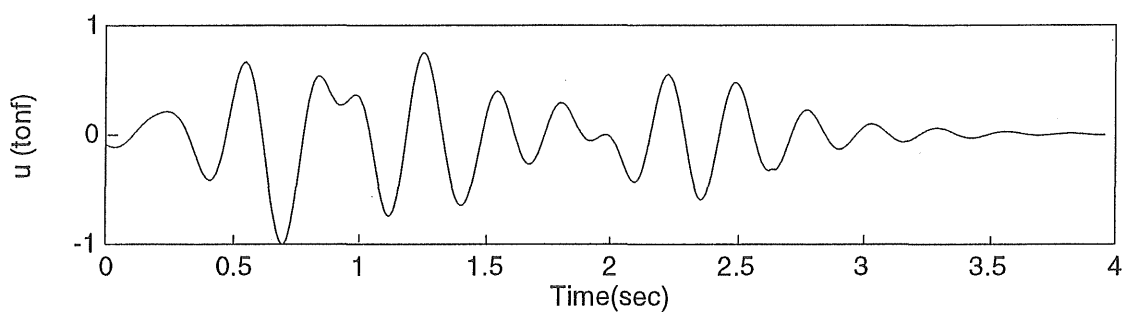


c) 瞬時最適化制御

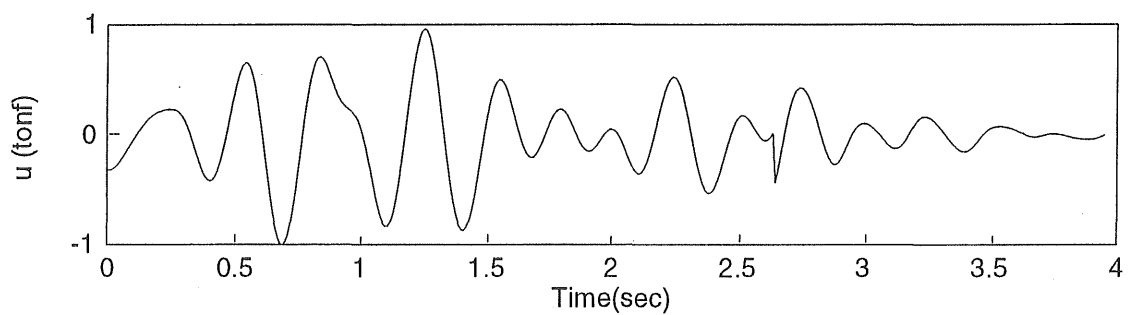
図 6.12 各制御理論による橋梁の変位応答
(有限帯板モデル, ハイブリッド制御)



a) 定常最適レギュレータ制御

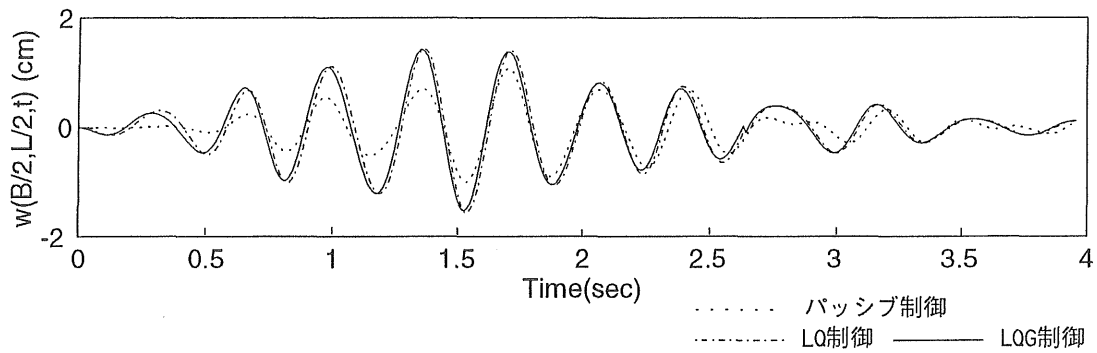


b) 非定常最適レギュレータ制御

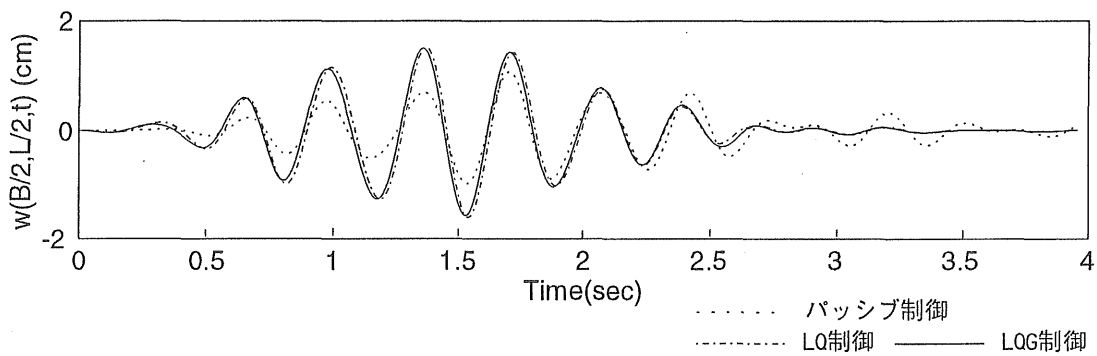


c) 瞬時最適化制御

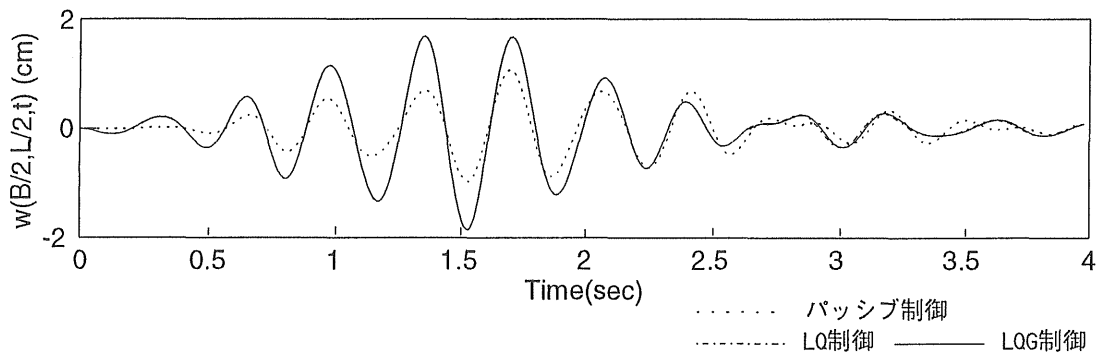
図 6.13 各制御理論における制御力
(有限帯板モデル, ハイブリッド制御)



a) 定常最適レギュレータ制御



b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御

図 6.14 各制御理論における動吸振器 (TMD) の動き
(有限帯板モデル, ハイブリッド制御)

表 6.3 各制御理論による制御効果 (有限帯板モデル)

			最適レギュレータ制御		瞬時最適化制御
			定常	非定常	
橋梁変位 (最大値) (cm)	非制御		0.3390		
	制御	パッシブ	0.2679		
		アクティブ	0.2303	0.2304	0.2400
		ハイブリッド	0.1537	0.1492	0.1431
橋梁変位 (標準偏差) (cm)	非制御		0.1163		
	制御	パッシブ	0.0869		
		アクティブ	0.0816	0.0769	0.0828
		ハイブリッド	0.0508	0.0472	0.0479
制御力 (最大値) (tonf)	アクティブ		2.0028	2.0006	1.9948
	ハイブリッド		1.0038	1.0012	1.0020

6. 3. 4 ハイブリッド制御に対する多段階制御理論の適用

プレートガーダー橋の有限帯板モデルに対して，瞬時最適化理論を多段階制御に拡張し，これをLQG制御に適用した場合の有効性をハイブリッド制御を実施した場合について考える．本研究では，1区間における状態量をフィードバックした制御理論と，これに時変系の特性を強く影響させるために，2区間，3区間および4区間における状態量をフィードバックした制御理論を橋梁振動に適用し，数値シミュレーションを行い，これらを比較することにより，時変系の特性を強く影響させた場合の制御理論の有効性を検討する．ここで，1区間，2区間，3区間および4区間における制御則を，それぞれ制御理論（Ⅰ），制御理論（Ⅱ），制御理論（Ⅲ）および制御理論（Ⅳ）とする．

図6.15に各制御理論をハイブリッド制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を示す．図6.16は，それぞれの制御理論に対する制御力である．各制御理論を比較するため制御力の最大値を $I(tonf)$ なるように調整する．また，図6.17は，それぞれの制御理論に対応する動吸振器の動きである．それぞれ，制御理論（Ⅰ）を点線，制御理論（Ⅱ）を破線，制御理論（Ⅲ）を鎖線，制御理論（Ⅳ）を実線で示す．

数値シミュレーションの結果，図6.15より時変系の特性を強く影響させた制御則ほど応答は低下していることが分かる．図6.25の各制御理論による制御力を見ても，最大値は $I(tonf)$ と一定ではあるが，全体的に見ると時変系の特性を強くしたため大きな制御力が作用していることが分かる．このことより，多段階制御理論をLQG制御に適用した場合の有効性が確認できる．

また，非制御の場合，パッシブ制御を実施したときおよび，各制

御理論を適用した場合における橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を表6.5にまとめる．

橋梁変位応答の最大値では，制御理論（Ⅱ）や制御理論（Ⅲ）より制御理論（Ⅳ）がやや劣った結果になっている．しかし，走行車両による橋梁振動では，不規則外力が作用するため，標準偏差による評価が妥当なものと思われる．橋梁変位応答の標準偏差による比較では，多段階制御理論の段階を上げることにより，効果的な制御となることが確認できる．有限帯板モデルのハイブリッド振動制御に多段階制御理論によるLQG制御に適用した場合，時変系の特性を強くした制御理論ほど有効な制御を行えることが確認できる．

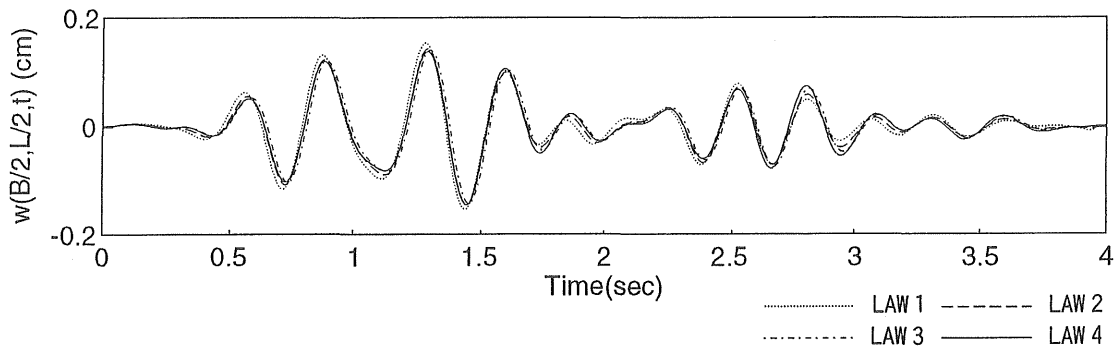


図 6.15 多段階制御による橋梁の変位応答
(有限帯板モデル)

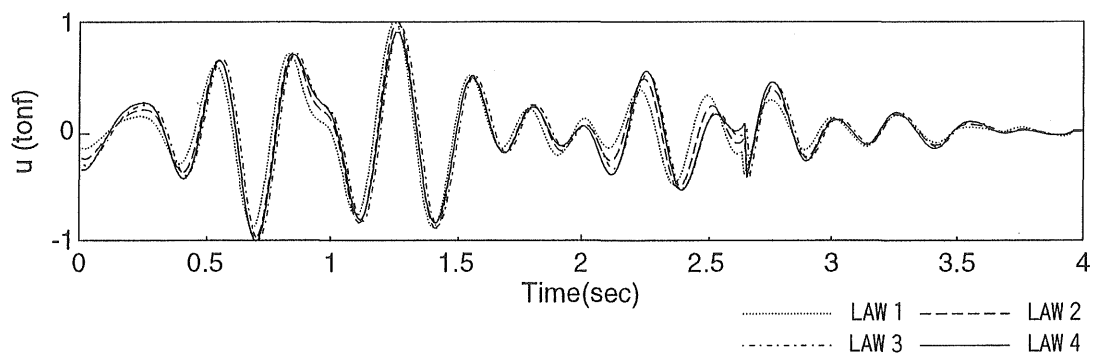


図 6.16 多段階制御における制御力
(有限帯板モデル)

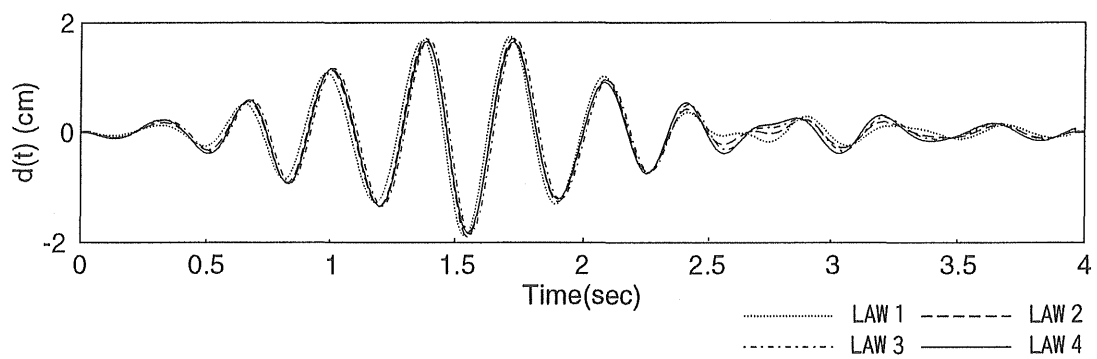


図 6.17 多段階制御における動吸振器 (TMD) の動き
(有限帯板モデル)

表 6.5 各制御則による制御効果 (有限帯板モデル)

				制御理論Ⅰ	制御理論Ⅱ	制御理論Ⅲ	制御理論Ⅳ
橋梁変位	非制御			0.3390			
(cm)	制御	パッシブ		0.2679			
		ハイブリッド	最大値	0.1538	0.1442	0.1431	0.1444
			標準偏差	0.0610	0.0570	0.0557	0.0555
制御力(最大値) (tonf)				1.0030	1.0070	1.0020	1.0068

6. 4 トラスドランガー橋モデルにおける振動制御

6. 4. 1 数値シミュレーションの条件

トラスドランガー橋の場合，各種制御理論によるアクティブ制御およびハイブリッド制御における橋梁のパラメータは，第2章の表2.4と図2.7の値である．車両のパラメータは，梁モデルや有限帯板モデルの場合と同じく表5.2の値を用いる．車両の速度は $v = 10(m/sec)$ である．

6. 4. 2 アクティブ制御

橋梁振動にアクティブ制御を実施した場合の各制御理論の有効性について検討を行う．図6.18に定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論をアクティブ制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答をLQ制御とLQG制御について示す．それぞれの図において，非制御を点線，LQ制御を行ったものを鎖線，LQG制御を行ったものを実線で示す．プレートガーダ橋の有限帯板モデルと同様に，トラスドランガー橋の場合においても，瞬時最適化理論は制御理論（Ⅱ）により数値解析を行い，これを瞬時最適化理論の解析結果として示す．各制御理論による応答波形を比較することにより，それぞれの理論の有効性を検討する．また，それぞれのLQ制御およびLQG制御の応答波形を比較することにより，カルマンフィルタを組み込んだ実用的な制御則であるLQG制御の可能性について検討する．

図6.19は，それぞれの制御理論に対応する制御力である．各制御理論の比較のため，制御力の最大値が $1(tonf)$ で一定となるように調整

を行っている．数値シミュレーションの結果，図 6.18 に示した波形のように各制御理論とも応答のレベルは低下してることが分かる．しかし，LQG 制御での 3 種類の制御理論による制御効果を比較すると，これらの間には顕著な差は認められず，非定常性を考慮した制御理論の特性が発揮されていない．本研究で対象としたトラストランガー橋は，重量が軽く，支間長が長い橋梁である．このため，橋梁の固有振動数の変動は緩やかものとなり橋梁振動は定常的挙動を示す．このため，定常最適レギュレータ理論でも十分な制御効果が得られたものと考えられる．

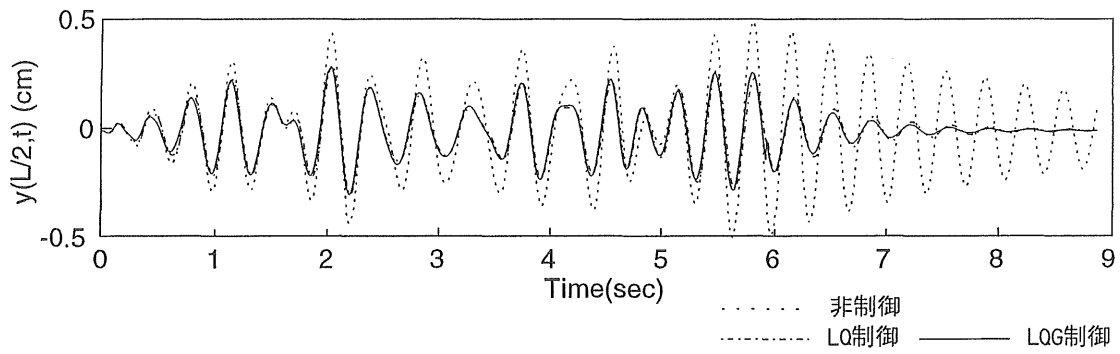
LQ 制御では，車両の状態量を含む全状態量が既知であるものとしているが，制御を行う実際の現場でこれを計測すること不可能である．これに対し，LQG 制御では，全状態量を橋梁上の 1 点の観測値よりカルマンフィルタにより推定しながら制御を行うため，この制御方法は有効であると言える．

梁モデルにおける状態推定において述べたように，連続系における定常および非定常のカルマンフィルタでは，特に車両の状態量を完全に推定できない可能性がある．しかし，数値シミュレーションの結果によると，図 6.18 a) b) において定常および非定常の連続系カルマンフィルタを組み込んだ LQG 制御による振動制御は，LQ 制御とほぼ同程度の効果を得られることが確認できる．一方，図 6.18 c) の瞬時最適化制御に離散系カルマンフィルタを組み込んだ LQG 制御では，同制御を LQ 制御に適用したものとほぼ完全に一致している．離散系カルマンフィルタを組み込んだ LQG 制御は，全状態量の推定が完全に行われており，理想的な制御が実現できるものと考えられる．

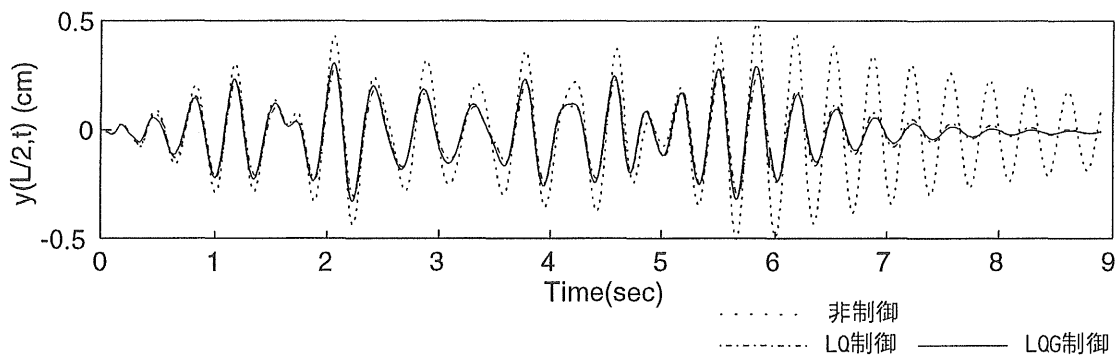
以上の数値シミュレーションで得られた結果を表 6.6 にまとめ，非制御の場合と各制御理論をアクティブ制御に適用した場合における

橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を示す．アクティブ制御は，LQG制御の場合である．

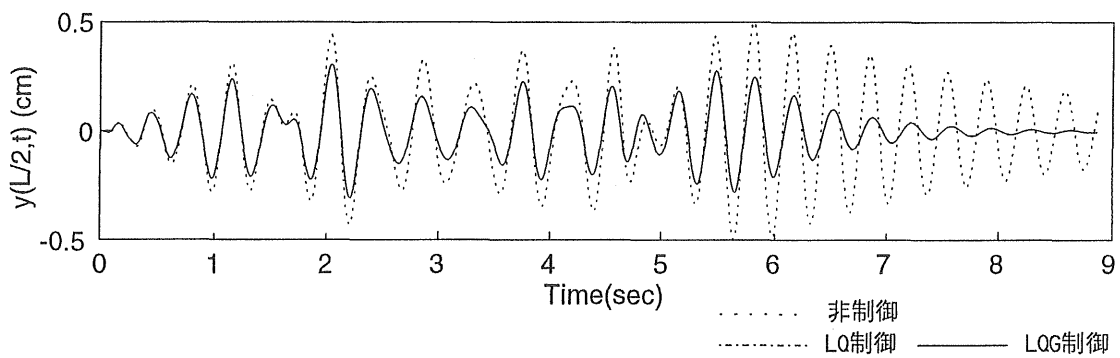
橋梁変位応答の最大値と標準偏差により，非制御に比べ，アクティブ制御に各制御理論を適用したすべての場合で，より有効な制御が実現できていることが分かる．しかし，各制御理論による差は僅かなものである．トラスドランガー橋に対するアクティブ制御では，定常最適レギュレータ理論でも十分な制御を行えることが確認できる．



a) 定常最適レギュレータ制御

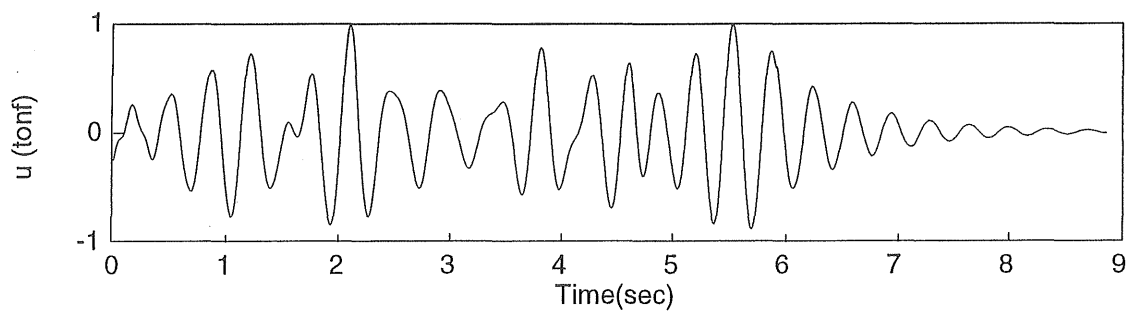


b) 非定常最適レギュレータ制御

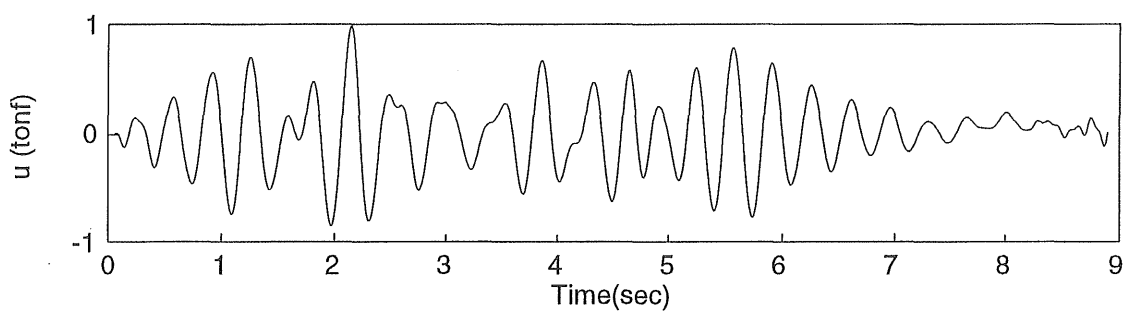


c) 瞬時最適化制御

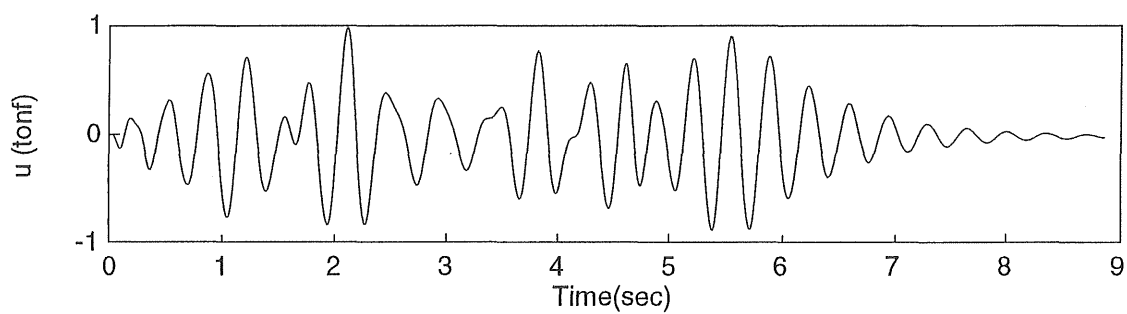
図 6.18 各制御理論による橋梁の変位応答
(トラスドランガー橋, アクティブ制御)



a) 定常最適レギュレータ制御



b) 非定常最適レギュレータ制御



c) 瞬時最適化制御

図 6.19 各制御理論における制御力
(トラスドランガー橋, アクティブ制御)

6. 4. 3 ハイブリッド制御

橋梁振動にハイブリッド制御を実施した場合の各制御理論による振動制御の有効性について検討を行う。動吸振器の設計法としては、不規則振動論により、着目点の変位応答の最大値を最小化する H_2 ノルム最適設計⁸⁾の手法を用いる。この設計法により、動吸振器の最適パラメータを求める。このときの諸元を表6.7に示す。ハイブリッド制御との比較のため、図6.20にパッシブ制御を橋梁振動に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を示す。この波形を見ると、他の橋梁と比べて、パッシブ制御の効果が有効であることが分かる。トラスドランガー橋は定常的な挙動を示すため、動吸振器の最適調

表 6.7 動吸振器(TMD)の最適パラメータ (ランガー橋モデル)

質量比	1/50
振動数 (Hz)	2.29
減衰定数	0.07

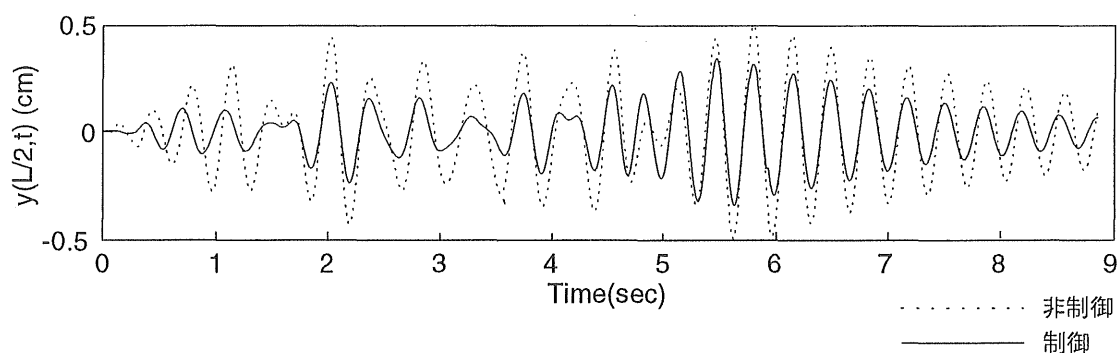


図 6.20 パッシブ制御による橋梁の変位応答
(トラスドランガー橋)

整があまりずれなかったためであると考えられる。しかし，前半時間では有効な制御となっているが，後半時間においては完全なものとは言えない。さらに，制御効果を高めるために，このパッシブ制御の動吸振器に制御力を加えるハイブリッド制御を考える。

図6.21に定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論をハイブリッド制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答をLQ制御とLQG制御について示す。それぞれの応答波形において，非制御を点線で，LQ制御を鎖線で，LQG制御を実線で示す。LQG制御を適用した場合の応答を比較し，各制御理論の振動制御効果を検討する。また，それぞれのLQ制御およびLQG制御を比較することにより，現場において実現可能な制御理論であるLQG制御の有効性を検討する。図6.22は，それぞれの制御理論に対応する制御力である。各制理論を比較するため制御力の最大値を $I(\text{tonf})$ で規準化する。図6.23には，それぞれの制御を行ったときの動吸振器の動きを示す。パッシブ制御を行った場合の動吸振器の動きを点線で，LQ制御を行った場合を鎖線で，LQG制御を行った場合を実線で示す。

数値シミュレーションの結果，図6.21より各制御理論とも応答のレベルは，図6.20のパッシブ制御の場合に比べ明らかに低下しており，ハイブリッド制御が有効であることが分かる。LQG制御における3種類の制御理論による振動制御効果を比較すると，非定常最適レギュレータ理論をLQG制御に適用したものが良い結果となっていることが確認できる。しかし，実用化を想定した場合，次に振動制御効果の良い瞬時最適化理論の適用が考えられる。

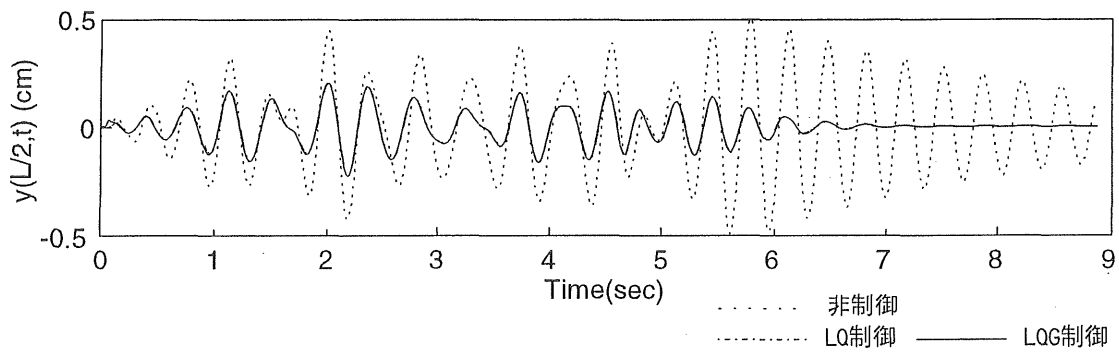
各制御理論によるLQG制御をLQ制御と比較すると，a) b) の連続系カルマンフィルタを組み込んだLQG制御よりも，c) の離散系カルマンフィルタを組み込んだLQG制御が有効となることが確認で

きる．この条件において，離散系カルマンフィルタと瞬時最適化理論によるLQG制御が最も効果的な制御であるということが言える．また，振動制御効果に関して，アクティブ制御による場合とハイブリッド制御による場合を図6.18および図6.21で比較してみると，明らかに，ハイブリッド制御を適用した方が，効果的な制御となっていることが分かる．

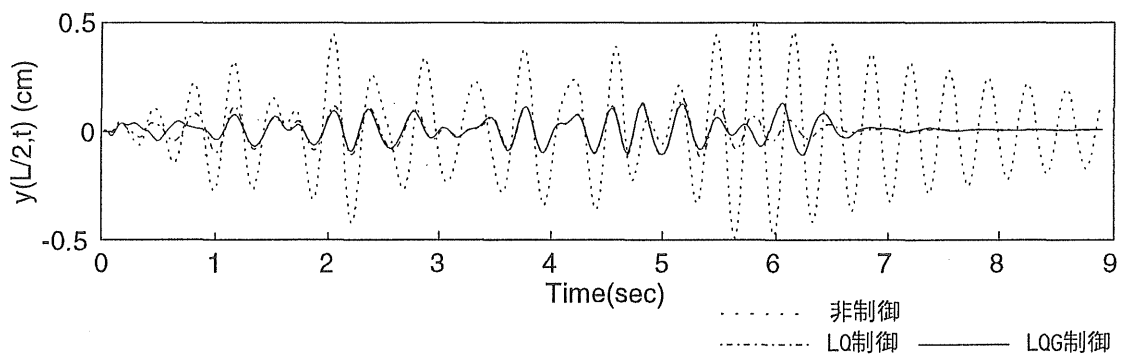
パッシブ制御およびハイブリッド制御における数値シミュレーションで得られた結果をアクティブ制御の場合と併記して表6.6に整理する．この表では，パッシブ制御および各制御理論をハイブリッド制御に適用した場合における橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を示す．ハイブリッド制御は，LQG制御の場合を示す．

橋梁変位応答の最大値と標準偏差により，非制御，パッシブ制御およびアクティブ制御に比べ，ハイブリッド制御に各制御理論を適用したすべての場合で良い制御効果が得られていることが確認できる．トラストランガー橋モデルでは，パッシブ制御やアクティブ制御に比べハイブリッド制御が効果的であることが分かる．

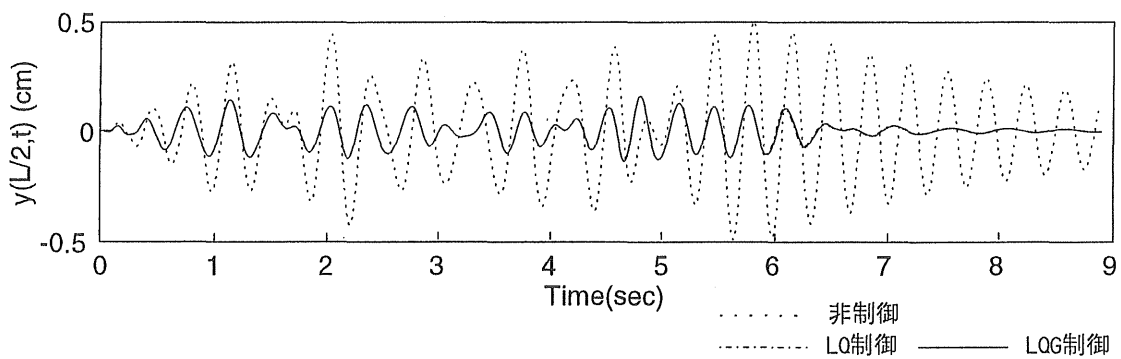
次に，ハイブリッド制御時における各制御理論による振動制御効果の比較では，橋梁変位応答の最大値および標準偏差による比較で，非定常レギュレータ理論が良い結果になっている．しかし，実用化を考えると，瞬時最適化理論の適用が有効である．トラストランガー橋モデルに対するハイブリッド制御では，瞬時最適化理論などの非定常理論が有効となることが確認できる．これは，プレートガーダー橋の有限帯板モデルのところでも述べたように，動吸振器の設置により，橋梁，動吸振器および車両の連成振動が起こり，システムの非定常性が強まったためであると考えられる．



a) 定常最適レギュレータ制御

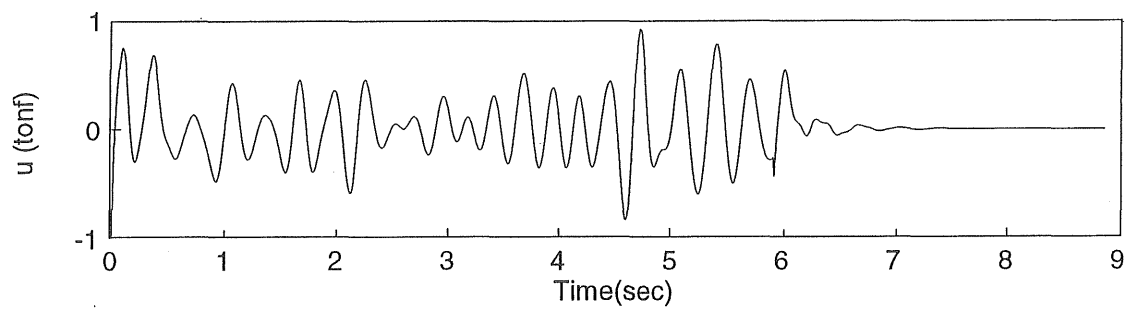


b) 非定常最適レギュレータ制御

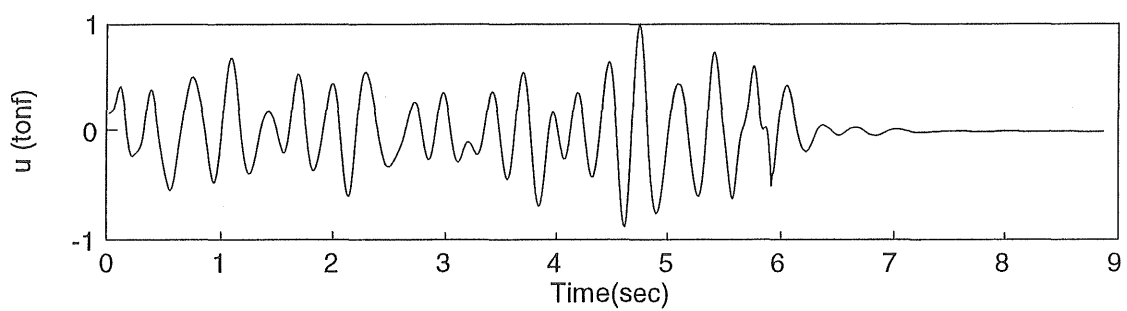


c) 瞬時最適化制御

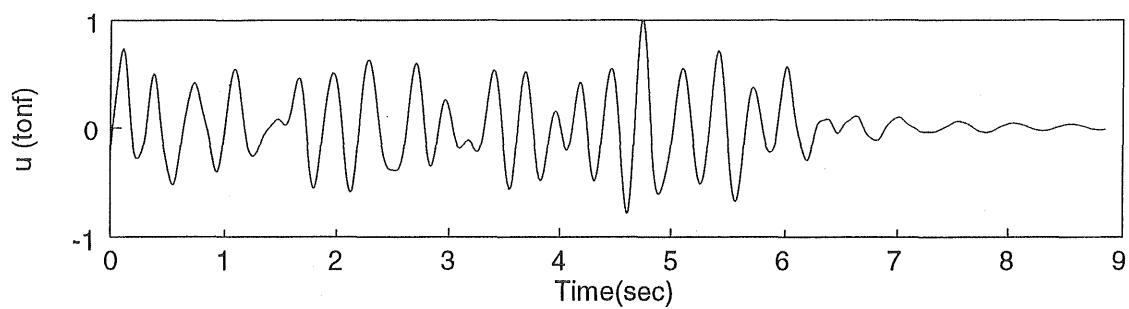
図 6.21 各制御理論による橋梁の変位応答
(トラスドランガー橋, ハイブリッド制御)



a) 定常最適レギュレータ制御

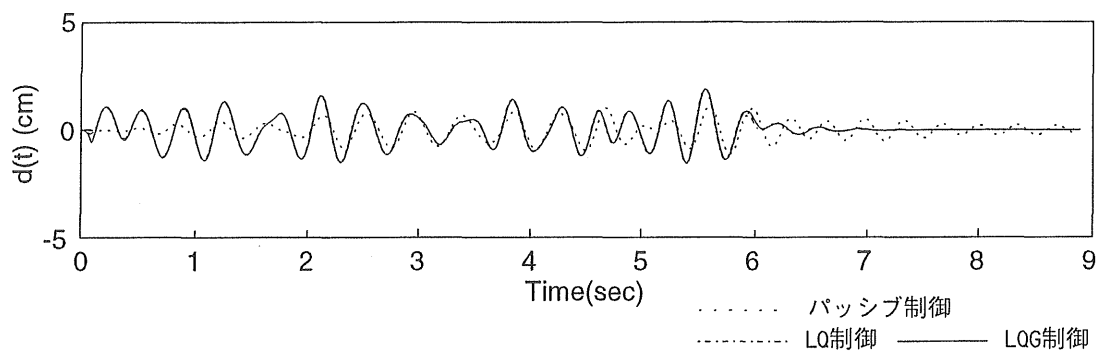


b) 非定常最適レギュレータ制御

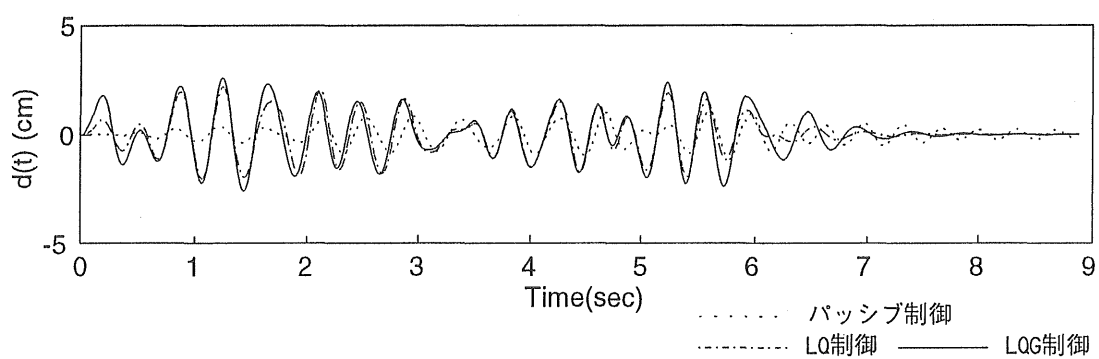


c) 瞬時最適化制御

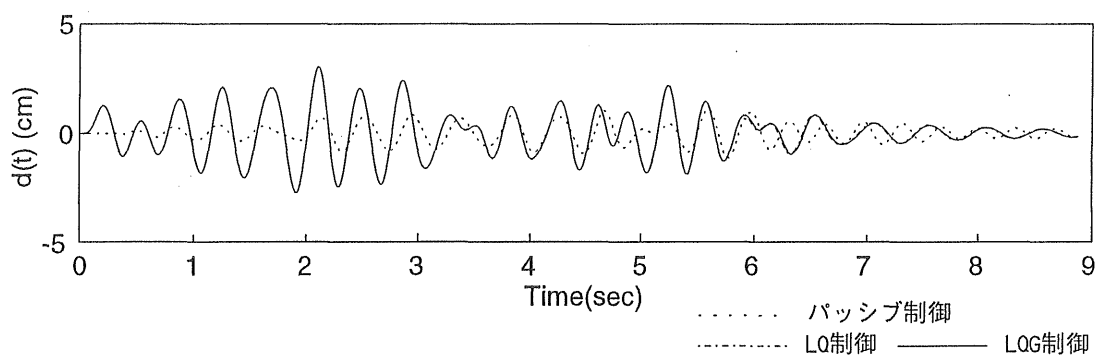
図 6.22 各制御理論における制御力
(トラスドランガー橋、ハイブリッド制御)



a) 定常最適レギュレータ理論



b) 非定常最適レギュレータ理論



c) 瞬時最適化理論

図 6.23 各制御理論における動吸振器 (TMD) の動き
(トラスドランガー橋、ハイブリッド制御)

表 6.6 各制御理論による制御効果 (トラスランガー橋モデル)

			最適レギュレータ制御		瞬時最適化制御
			定常	非定常	
橋梁変位 (最大値) (cm)	非制御		0.5006		
	制御	パッシブ	0.3437		
		アクティブ	0.2940	0.2988	0.3106
		ハイブリッド	0.2268	0.1377	0.1594
橋梁変位 (標準偏差) (cm)	非制御		0.2139		
	制御	パッシブ	0.1256		
		アクティブ	0.1088	0.1166	0.1140
		ハイブリッド	0.0733	0.0509	0.0590
制御力 (最大値) (tonf)	アクティブ		0.9961	1.0023	0.9977
	ハイブリッド		1.0045	0.9976	1.0014

6. 4. 4 ハイブリッド制御に対する多段階制御理論の適用

次にハイブリッド制御に対して瞬時最適化理論を多段階制御に拡張し，これをLQG制御に適用した場合の有効性について検討を行う．

1 区間における状態量をフィードバックした制御理論と，これに時変系の特性を強く影響させるために，2 区間，3 区間および4 区間における状態量をフィードバックした制御理論を橋梁振動に適用し，数値シミュレーションを行い，これらを比較することにより，時変系の特性を強く影響させた場合の制御理論の有効性を検討する．ここで，1 区間，2 区間，3 区間および4 区間における制御則を，それぞれ制御理論（Ⅰ），制御理論（Ⅱ），制御理論（Ⅲ）および制御理論（Ⅳ）とする．

図6.24に各制御理論をハイブリッド制御に適用した場合の橋梁支間中点における変位応答を示す．図6.25には，それぞれの制御理論に対応する制御力を示す．各制御理論を比較するため制御力の最大値を $I(\text{tonf})$ となるように調整する．また，図6.26には，それぞれの制御理論に対応する動吸振器の動きを示す．それぞれ，制御理論（Ⅰ）を点線で，制御理論（Ⅱ）を破線で，制御理論（Ⅲ）を鎖線で，制御理論（Ⅳ）を実線で示す．

数値シミュレーションの結果，図6.24より，時変系の特性を強く影響させた制御理論ほど応答の最大値および標準偏差ともに低下している．図6.25の各制御理論による制御力を見ても，最大値は $I(\text{tonf})$ と一定ではあるが，全体的に見ると時変系の特性を強くすることにより大きな制御力が動吸振器に加わっていることが分かる．このことが原因となり，図6.26に示した動吸振器の動きも時変系の特性を強くすることで大きくなり，その結果，橋梁の振動が低減されているものと考えられる．トラスランガー橋モデルのハイブリッ

ド振動制御に対し多段階制御理論によるLQG制御を適用した場合の有効性が確認できる。

非制御の場合，パッシブ制御を実施したときおよび，各制御理論を適用した場合における橋梁変位応答の最大値と標準偏差および，各場合における制御力の最大値を表6.8にまとめる。橋梁変位応答の最大値および標準偏差による比較では，多段階制御理論の段階を上げるごとに，効果的な制御となることが確認できる。トラスドランガー橋モデルのハイブリッド振動制御に多段階制御理論によるLQG制御に適用した場合，時変系の特性を強くした制御理論ほど有効な制御を行えることが分かる。この傾向は，表6.5に示したプレートガーダー橋の有限帯板モデルの場合よりも大きなものとなっている。この原因として，トラスドランガー橋はプレートガーダー橋の有限帯板モデルに比べ，支間長が大きく制御力を長時間作用させることができたためであると考えられる。

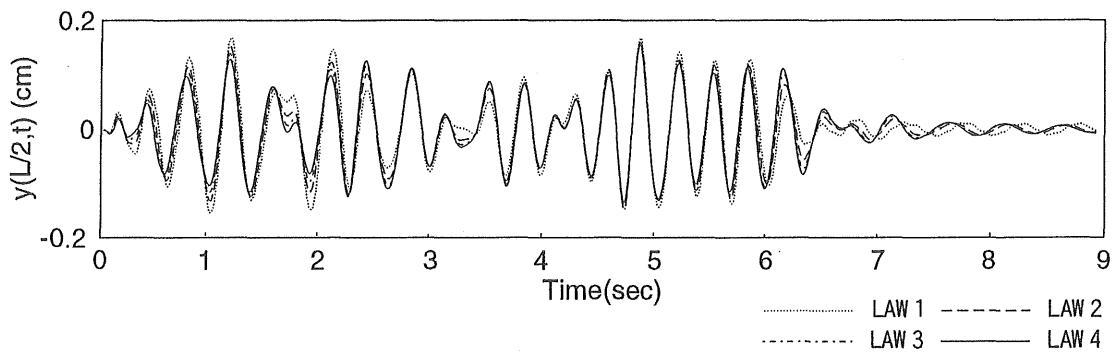


図 6.24 多段階制御による橋梁の変位応答
(トラスドランガー橋)

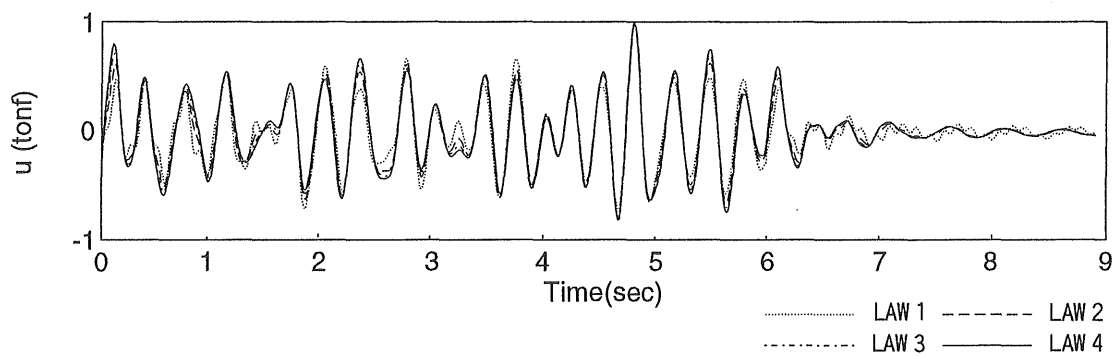


図 6.25 多段階制御における制御力
(トラスドランガー橋)

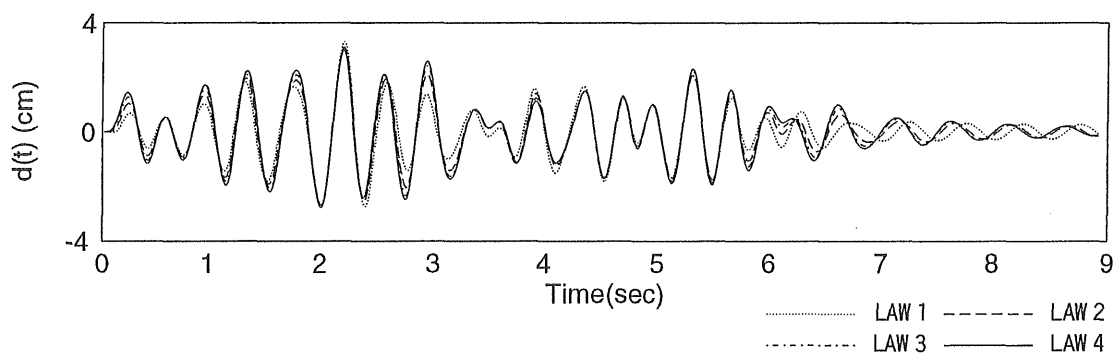


図 6.26 多段階制御における動吸振器 (TMD) の動き
(トラスドランガー橋)

表 6.8 各制御理論による制御効果 (トラスドランガー橋モデル)

				制御理論Ⅰ	制御理論Ⅱ	制御理論Ⅲ	制御理論Ⅳ
橋梁変位	非制御			0.5006			
(cm)	制御	パッシブ		0.3437			
		ハイブリッド	最大値	0.1704	0.1613	0.1594	0.1561
			標準偏差	0.0640	0.0599	0.0590	0.0579
			制御力(最大値) (tonf)			0.9990	1.0031

6. 5 吊床版歩道橋における振動制御

6. 5. 1 最適レギュレータ理論による振動制御

歩行外力による吊床版歩道橋の振動制御をアクティブ制御により実施する．この制御理論に最適レギュレータ理論を採用する．対象モデルは，オブザーバーによる状態推定で用いたものと同じである．制御対象は曲げ1次から曲げ10次までとする．制御力の作用点は，各振動モードが明確に表れている $\frac{3}{16}L$ 地点を選ぶ．

図6.27は $\frac{3}{8}L$ 地点の橋梁の変位応答である．非制御を点線，最適レギュレータ理論による制御を実線で示す．図6.28はこのとき要する制御力である．

数値シミュレーションの結果，図6.27に示した橋梁の変位応答によると，制御の有効性が確認できる．特に，歩行者が $\frac{3}{8}L$ 地点を通過する約18(sec)以降は制御，非制御共に応答のレベルが低下している．振動レベルが低下しているために，小さな制御力を用いて，妥当な振動制御が実現できることが分かる．また，図6.28に示した制御力の波形を見ると，この場合，制御に必要な制御力は歩行外力の約 $\frac{1}{3}$ 程度となっており，現実的な値と言える．

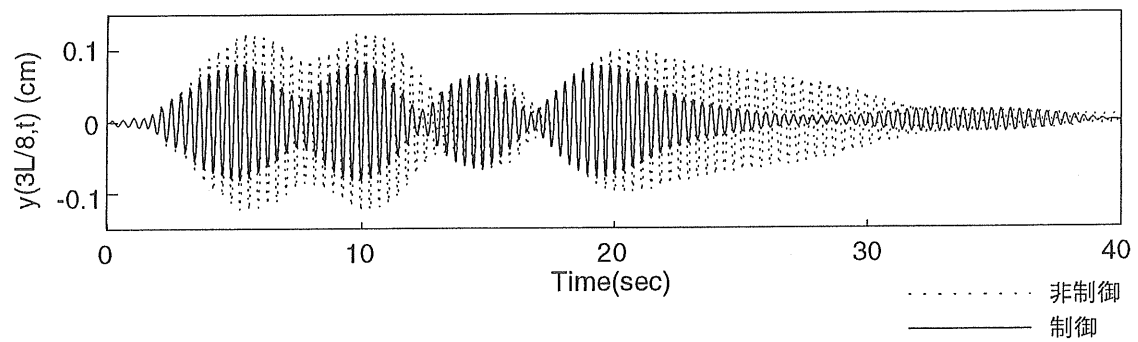


図 6.27 最適レギュレータ理論による橋梁の変位応答
(吊床版歩道橋, アクティブ制御)

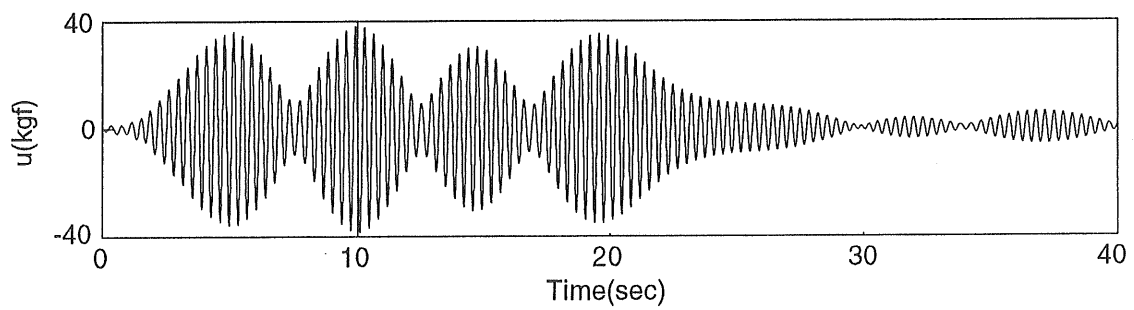


図 6.28 最適レギュレータ理論における制御力
(吊床版歩道橋, アクティブ制御)

6. 5. 2 オブザーバーによる振動制御

最適レギュレータ理論では， r 次振動までを制御対象とする場合，構造物に r 個の検出器を取り付け，各次の状態変数を計測する必要がある．しかし，オブザーバーによる制御理論では，1つの検出器のデータから，必要な r 次振動までの基準座標を推定し，制御を行うことが可能である．そこで，この制御理論による振動制御効果の有効性について検討する．対象とするモデルは，最適レギュレータ理論による場合と同一のものとする．制御対象も曲げ1次から曲げ10次までである．オブザーバーでは， $\frac{3}{8}L$ 地点の速度応答のみから全状態量を推定し， $\frac{3}{16}L$ 地点に制御力を加える．

図6.29は $\frac{3}{8}L$ 地点の橋梁の変位応答である．非制御を点線，オブザーバー理論による制御を実線で示す．図6.30はこのとき要する制御力である．数値シミュレーションの結果，図6.29に示した変位応答の波形は，オブザーバーを用いない図6.27の結果と比べて変化はない．また，図6.30の制御力に関しても同様である．以上より，オブザーバーを用いる場合の振動制御の有効性が確認できる．したがって，オブザーバーを用いる実用的な制御器の設計の可能性が確認できる．

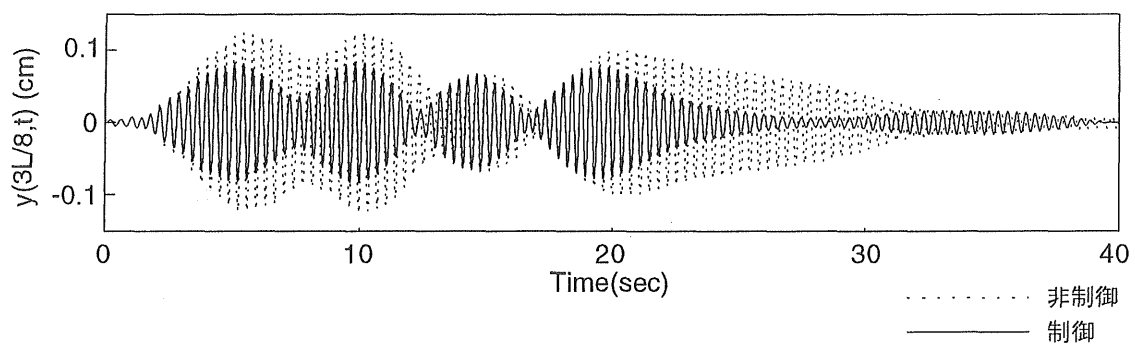


図 6.29 オブザーバー理論を用いた制御理論による橋梁の変位応答
(吊床版橋, アクティブ制御)

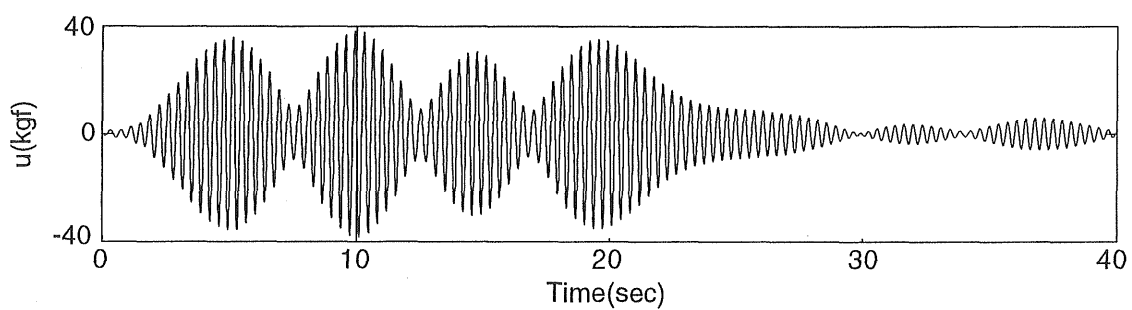


図 6.30 オブザーバー理論を用いた制御理論における制御力
(吊床版橋, アクティブ制御)

6. 6 ま と め

本章では，それぞれの橋梁モデルに各種の制御理論を適用し，数値シミュレーションによる数値解析を行い，各制御理論の振動制御に対する有効性を検討した．得られた結果をまとめると次のようになる．

(1) 走行車両によるプレートガーダー橋振動の梁モデルにおけるアクティブ制御とハイブリッド制御について数値シミュレーションを行った．適用した制御理論は，定常最適レギュレータ理論，非定常最適レギュレータ理論，瞬時最適化理論 (I) (II) およびスライディングモード理論である．

アクティブ制御の場合，瞬時最適化制御理論 (II) およびスライディングモード理論において他の制御理論に比べ優れた制御効果が得られた．

ハイブリッド制御の場合，まず，制御力を作用させないパッシブ制御の振動制御効果について検討した．しかし，動吸振器によるパッシブ制御では，橋梁の固有振動数に対する動吸振器のチューニングが不可能であるために十分な制御を行うことができなかった．ハイブリッド制御においては，非定常最適レギュレータ理論を適用した場合に制御効果が最も良くなった．しかし，非定常レギュレータ理論は，制御力を逆算する必要があるため実用的なものではない．この理論に次いで制御効果の良い瞬時最適化理論 (II) の適用が有効であることを確認した．梁モデルでは，アクティブ制御，ハイブリッド制御共に時変系のための制御理論が有効となることが確認できた．ハイブリッド制御をアクティブ制御およびパッシブ制御と比較した場合，ハイブリッド制御が最も良い結果となった．

(2) 走行車両によるプレートガーダー橋振動を有限帯板法により

モデル化した場合に対しアクティブ制御とハイブリッド制御を実施した。これに確定系制御理論（LQ制御）および確率的制御理論（LQG制御）を適用した場合の数値シミュレーションを行い、各制御理論の有効性を検討した。適用した制御理論は、定常最適レギュレータ理論、非定常最適レギュレータ理論、瞬時最適化理論（Ⅱ）である。ハイブリッド制御においては、瞬時最適化理論の時変系の特性を強く影響させた多段階制御についても検討した。

アクティブ制御を適用した場合、各制御理論とも同等の制御効果になった。この条件では、定常最適レギュレータ理論でも有効な制御となることが分かった。また、LQG制御とLQ制御の制御効果がほぼ同じことから、LQG制御による振動制御の可能性が確認できた。

ハイブリッド制御を適用した場合、まず、制御力を作用させないパッシブ制御の振動制御効果について検討したが十分な制御を行うことができなかった。ハイブリッド制御では、瞬時最適化制御理論を用いた制御が最も良い結果となった。これは、動吸振器を設置したことによりシステムの非定常性が強まったため、時変系のための制御理論が有効になったものと考えられる。また、LQ制御との比較によりLQG制御の有効性が確認できた。また、アクティブ制御の半分の制御力でも、ハイブリッド制御がパッシブ制御やアクティブ制御よりも効果的な制御を行えることが確認できた。

ハイブリッド制御においてLQG制御に多段階制御を適用した場合、時変系の特性を強く影響させた制御理論ほど良い制御効果が得られた。

（３）走行車両によるトラスドランガー橋振動のアクティブ制御とハイブリッド制御に、LQ制御およびLQG制御を適用した場合の制御効果について数値シミュレーションによる検討を行った。適用した制御理論は、定常最適レギュレータ理論、非定常最適レギュレー

タ理論，瞬時最適化理論（Ⅱ）である．ハイブリッド制御においては，瞬時最適化理論の時変系の特性を強く影響させた多段階制御についても検討した．

アクティブ制御を適用した場合，対象とした橋梁振動が，定常的挙動を示すため，非定常を持たない制御においても有効な制御が実現できた．LQG制御では，LQ制御とほぼ同じ結果が得られた．

ハイブリッド制御を適用した場合，まず，パッシブ制御の振動制御効果について検討した．プレートガーダー橋振動の梁モデルや有限帯板モデルの場合に比べ良い結果になった．これは，トラスドランガー橋が定常的な挙動を示すためであると考えられる．ハイブリッド制御では，非定常レギュレータ理論を用いた制御において，最も良い制御効果が得られた．しかし，非定常レギュレータ理論は実用的なものではないため，この次に制御効果の良い瞬時最適化理論の適用が有効であることを確認した．有限帯板モデルの場合と同様に，ハイブリッド制御においてシステムの非定常性が強まったため，時変系のための制御理論が有効になったものと考えられる．LQG制御では，LQ制御とほぼ同じ結果が得られた．また，アクティブ制御やパッシブ制御に比べハイブリッド制御が有効となることが確認できた．

ハイブリッド制御においてLQG制御に多段階制御を適用した場合，時変系の特性を強く影響させた制御理論ほど良い制御効果が得られた．この傾向は，プレートガーダー橋の有限帯板モデルより大きなものであった．この原因は，トラスドランガー橋の場合の方が長時間制御力を加えたためであると考えられる．

（４）歩行外力による吊床版歩道橋振動のアクティブ制御に対し，最適レギュレータ理論を適用した場合の数値シミュレーションを行い，振動制御の効果について検討した．この結果，アクティブ制御

による振動制御の有効性が確認できた．また，同一のモデルにオブザーバーを用いた制御則を適用した場合も，ほぼ同等の制御効果が得られた．

吊床版歩道橋は，歩行者による外力を受ける場合，多くの振動モードが励起される．モデル化の際無視した高次の振動モードがアクチュエーターにより励起されるスピルオーバーの問題が発生する可能性がある．このような問題に対して，ロバスト安定な H^∞ 制御理論⁹⁾等の適用が今後の課題である．

参考文献

- 1) 岡林隆敏・尾口慎也・加賀敏明：各種フィードバック制御則による道路橋交通振動のアクティブ制御，構造工学論文集，Vol.42A，pp.731-738,1996.4.
- 2) 加賀敏明・岡林隆敏：スライディングモード理論による道路橋交通振動のアクティブ制御，土木構造・材料論文集，第13号，pp.49-57,1997.12.
- 3) 岡林隆敏・加賀敏明：スライディングモード理論による道路橋交通振動の制御，長崎大学工学部研究報告，Vol.26,No.47，pp.279-286,1996.7.
- 4) 加賀敏明・岡林隆敏：単一走行車両による道路橋振動のスライディングモード制御，応用力学連合講演会，講演予稿集，pp.31-32,1996.12.
- 5) 岡林隆敏・加賀敏明・吉村徹・尾口慎也：単一車両が走行する道路橋の確率的制御理論による振動制御，土木学会論文集，1998.4.
- 6) 岡林隆敏・馬渡あかね・加賀敏明：MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の歩行者励起振動の解析と制御設計，構造工学論文集，Vol.43A,pp.693-702,1997.3.
- 7) 岡林隆敏・尾口慎也・加賀敏明：時変フィードバック則による道路橋交通振動のアクティブ制御，第3回土木学会振動制御コロキウム講演論文集 PART.B,pp.33-40,1995.8.
- 8) 岡林隆敏・加賀敏明：動吸振器の最適設計に関する考察，土木学会橋梁交通振動コロキウム論文集 PART.B,pp.273-79,1995.11.
- 9) 岡林隆敏・小松正貴・角本周・下田郁夫：歩行者による吊床版橋振動の H^∞ 制御理論によるアクティブ制御，土木学会論文集，No.577/I-41,pp.153-163,1997.10.

第 7 章 結 論

都市高速道路高架橋における交通荷重によって発生する環境振動が、深刻な問題となっている。このような振動障害の対策の一つとして、直接、橋桁の振動をアクティブに制御する技術が検討されている。しかし、走行車両による道路橋の振動では、橋梁-車両系が時変系となること、また車両の状態が観測できないなど、アクティブ振動制御を行うためには、解決すべき問題があった。そこで、本研究では、①時変系に対する制御則の確立、②橋梁上の1点の観測値から車両を含む全状態量の推定機構の構成、③推定と制御を行う確率的制御則の確立、を目的とした。そこで、道路橋振動および歩行者による歩道橋振動にアクティブ振動制御を適用し、数値シミュレーションによりアクティブ振動制御の有効性を検証した。

本研究で得られた結果は次のように要約するとができる。

(1) 走行車両による道路橋梁振動の対象は、支間長が短いため、橋梁振動が非定常的挙動を示すプレートガーダー橋と、橋梁の重量が軽く、支間長が長いため橋梁振動が定常的挙動を示すトラスドラングー橋とした。プレートガーダー橋は梁および有限帯板法によりモデル化した。トラスドラングー橋は、2次元の有限要素法によりモデル化した。また、歩行者による歩道橋振動の対象として、フレキシブルな構造のため振動しやすい吊床版歩道橋を考えた。これを3次元の有限要素法によりモデル化した。これらの橋梁モデルの振動解析を行うことにより振動制御を行う制御対象橋梁の固有振動数の範囲を確認した。

(2) ハイブリッド振動制御の基礎となる橋梁-動吸振器-車両系の状態空間表示を行った。この表示を基に、まず、最適レギュレータ理論の定式化を行った。現実的な制御方法である定常制御則と、より厳密な非定常制御則を誘導した。次に、瞬時最適化理論の定式化を行った。さらに、これを拡張した多段階制御理論を提案し、よ

り時変系の特性が強いシステムに対応させた．最後に時変系振動にロバスト性が強いスライディングモード理論の定式化を行った．

(3) 路面凹凸を定常確率過程でモデル化することにより，橋梁 - 動吸振器 - 車両 - 路面系の確率微分方程式を誘導した．この確率微分方程式に基づいて，定常および非定常な連続系のカルマンフィルタを定式化した．さらに，実際の制御に適した離散系の非定常カルマンフィルタを誘導した．次に，カルマンフィルタを最適レギュレータ理論および瞬時最適化理論に組み込み，確率的制御理論 (LQG 制御) を誘導した．さらに，歩行者による吊床版歩道橋振動に対して，全次元のオブザーバー理論による状態推定と振動制御を適用した．

(4) カルマンフィルタによる状態推定の精度を数値シミュレーションにより検討した．プレートガーダー橋の梁モデルおよび有限帯板モデルによる橋梁 - 動吸振器 - 車両 - 路面系を考え，橋梁の 3 次振動まで，車両および路面凹凸の状態推定を実施した．この結果，橋梁上の 1 点の観測値より，路面凹凸以外は精度の良い推定が行えることを確認した．また，吊床版歩道橋では，オブザーバーにより橋梁上の 1 点の観測値から吊床版歩道橋の曲げ 10 次振動までの状態推定が可能であることを確認した．道路橋交通振動および歩行者励起歩道橋振動において，橋梁上の 1 点の観測値から全状態量の推定が可能であることが確認できた．

(5) 各橋梁モデルに対する振動制御の有効性を数値シミュレーションにより検討した．梁モデルの場合，アクティブ制御では瞬時最適化理論およびスライディングモード理論が優れた制御効果を示した．ハイブリッド制御では非定常最適レギュレータ理論が良い結果となったが，非定常レギュレータ理論では制御力を逆算する必要があるため実用的なものではない．非定常レギュレータ理論に次いで制御効果の良かった瞬時最適化理論の適用が有効であることを確認した．

プレートガーダー橋の梁モデルでは，アクティブ制御，ハイブリッド制御共に時変系のための制御理論が有効となることが明らかになった．次に，トラストランガー橋モデルおよびプレートガーダー橋の有限帯板モデルの場合，アクティブ制御では各理論による差はなく，ハイブリッド制御では非定常な理論が有利となることを確認した．ハイブリッド制御においてシステムの非定常性が強まったため，時変系のための制御理論が有効になったものと考えられる．カルマンフィルタを適用した確率的制御理論による制御を検討した．橋梁上の1点の観測値から橋梁・動吸振器・車両系の状態推定が可能になり，これらの全状態量をフィードバックする制御が実現できた．確定的制御理論と同等の結果が得られ，実用的な制御の可能性が明らかになった．歩行者による吊床版歩道橋振動の振動制御では，最適レギュレータ理論および，これにオブザーバーによる状態推定を組み込んだ制御則によりアクティブ制御を実施し，その有効性を確認した．

本研究により，これまで未解決であった走行車両による道路橋振動のアクティブ制御における時変系および状態推定の問題に対する制御則および状態推定機構が確立できた．制御則に，最適レギュレータ理論，瞬時最適化理論およびスライディングモード理論を適用することで時変系の問題に対応した．本研究では，さらに時変系に対応するため，瞬時最適化理論を拡張した多段階制御理論を提案した．推定機構に，カルマンフィルタを適用することで状態推定の問題に対応した．さらに，推定と制御を行う確率的制御理論を構成した．数値シミュレーションを実施することにより道路橋振動の時変系および状態推定に対するこれらの制御則および状態推定機構の有効性が明らかになった．また，本研究により，歩行者による吊床版歩道橋振動のアクティブ制御に対する制御則，状態推定機構および推定

と制御を行う制御則が確立できた．制御則には，最適レギュレータ理論，状態推定機構には，オブザーバーを適用することで対応した．数値シミュレーションにより，これらの制御則および状態推定機構の吊床版歩道橋振動に対する有効性が明らかになった．

今後の課題としては，道路橋振動問題に対するものとして，まず，車両の走行状態のばらつきによる交通荷重の不確定性の問題がある．複数台の車両による交通荷重の不確定性に対しロバストな制御則が望まれる．本研究において時変系のための制御則として用いたスライディングモード理論がこの問題に適用可能なものと考えられる．次に，交通荷重の不確定性の問題に対する状態推定機構についても検討する必要がある．スライディングモード理論を状態推定理論に拡張したVSSオブザーバーやニューラルネットワーク等の適用が有効なものと考えられる．道路橋振動制御に対する実用的な視点からは，Fuzzy制御やニューロ制御などの適用が考えられる．一方，吊床版歩道橋振動に対する研究の課題としては，モデル化の際無視される高次振動モードによるスピルオーバーを回避する問題がある．モデル化誤差に対してロバストな H^∞ 制御の適用が有効であると考えられる．

交通荷重による橋梁振動の制御は，時変系や状態推定さらに交通荷重の不確定性の問題等，通常の構造物に比べ解決しなければならない多くの課題を抱えている．しかし，今後さらに交通量の増加や橋梁の長大化が予想されるため，橋梁振動のアクティブ制御に関する研究は，技術者にとってより重要な問題となるであろう．本研究による道路橋交通振動における時変系および状態推定に対する制御則の確立が，この分野における基礎的研究の第一歩となることを信ずる．今後も，道路橋交通振動制御のより高度な研究や実用化に微力ながら尽力したい．

付録 [A] 有限帯板法による剛性マトリックスの誘導

プレートガーダー橋の帯板要素の剛性を求める¹⁾。図2.2に示したプレートガーダー橋の帯板要素の剛性マトリックス K は、ひずみマトリックス B 、および剛度マトリックス D を用い以下のように表現できる。

$$K = \int_0^L \int_0^d B^T D B dx dy \quad (A-1)$$

式の簡略化のため面積積分による表現と $B = \sum_{k=1}^r B_k$ の関係を用いると (A-1) 式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} K &= \int_A B^T D B dA \\ &= \int_A [B_1 \ B_2 \cdots B_r]^T D [B_1 \ B_2 \cdots B_r] dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} B_1^T D B_1 & B_1^T D B_2 & \cdots & B_1^T D B_r \\ B_2^T D B_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_r^T D B_1 & \cdots & \cdots & B_r^T D B_r \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (A-2)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1r} \\ K_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{r1} & \cdots & \cdots & K_{rr} \end{bmatrix}$$

帯板の橋軸方向 (y方向) が単純支持のとき Y_k は、

$$Y_k = \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \quad (A-3)$$

$$= \sin k_k y \quad (k = 1, 2, \dots)$$

これより

$$Y'_k = k_k \cos k_k y \quad (A-4)$$

$$Y''_k = -k_k^2 \sin k_k y \quad (A-5)$$

直交性より、 $k \neq n$ のとき

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^L Y_k Y_n dy = 0 \\ I_2 = \int_0^L Y_k Y'_n dy = 0 \\ I_3 = \int_0^L Y_k Y''_n dy = 0 \\ I_4 = \int_0^L Y_k Y'_n dy = 0 \end{cases} \quad (A-6)$$

したがって,

$$K_{kn} = 0 \quad (k \neq n) \quad (\text{A-7})$$

であり, 剛性マトリックス K は対角要素のみが残り,

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & & 0 \\ & K_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & K_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

次に, B_k および D は,

$$B_k = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \Psi^T}{\partial x^2} Y_k \\ -\frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \Psi^T \\ -2\frac{\partial^2 (\Psi^T Y_k)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

$$D = \begin{bmatrix} D_x & D_l & 0 \\ D_l & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A-10})$$

ここで, S_k は k 次の変位関数, Ψ は形状関数ベクトル, D_x, D_y, D_{xy}, D_l はそれぞれ帯板要素の板曲げ剛性である.

(A-2) 式の要素を

$$K_{km} = K_k \quad (\text{A-11})$$

と置き替えると,

$$K_k = \int_A B_k^T D B_k dA$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} \psi_1' Y_k & \psi_1 Y_k'' & \psi_1' Y_k' \\ \psi_2' Y_k & \psi_2 Y_k'' & \psi_2' Y_k' \\ \psi_3' Y_k & \psi_3 Y_k'' & \psi_3' Y_k' \\ \psi_4' Y_k & \psi_4 Y_k'' & \psi_4' Y_k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x & D_l & 0 \\ D_l & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1' Y_k & \psi_2' Y_k & \psi_3' Y_k & \psi_4' Y_k \\ \psi_1 Y_k'' & \psi_2 Y_k'' & \psi_3 Y_k'' & \psi_4 Y_k'' \\ \psi_1 Y_k' & \psi_2 Y_k' & \psi_3 Y_k' & \psi_4 Y_k' \end{bmatrix} dA \quad (\text{A-12})$$

となる. これに (2-11) 式の ψ_1 から ψ_4 および (A-3) 式の Y_k を代入し各要素につき積分計算を行うと k 次モードの剛性マトリックスは最終的に次のように求められる.

$$K_k = \begin{bmatrix} \frac{13Ld}{70} k_k^4 D_y + \frac{12L}{5d} k_k^2 D_{xy} & \frac{3L}{5} k_k^2 D_1 + \frac{L}{5} k_k^2 D_{xy} & \frac{9Ld}{140} k_k^4 D_y - \frac{12L}{5d} k_k^2 D_{xy} & -\frac{13Ld^2}{840} k_k^4 D_y + \frac{L}{5} k_k^2 D_{xy} \\ + \frac{6L}{5d} k_k^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & + \frac{3L}{d^2} D_x + \frac{11Ld^2}{420} k_k^4 D_y & -\frac{6L}{5d} k_k^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & + \frac{L}{10} k_k^2 D_1 + \frac{3L}{d^2} D_x \\ \hline & \frac{Ld^3}{210} k_k^4 D_y + \frac{4Ld}{15} k_k^2 D_{xy} & \frac{13Ld^2}{840} k_k^4 D_y - \frac{L}{5} k_k^2 D_{xy} & -\frac{3Ld^3}{840} k_k^4 D_y - \frac{Ld}{15} k_k^2 D_{xy} \\ & + \frac{2Ld}{15} k_k^2 D_1 + \frac{2L}{d} D_x & -\frac{L}{10} k_k^2 D_1 - \frac{3L}{d^2} D_x & -\frac{Ld}{30} k_k^2 D_1 + \frac{L}{d} D_x \\ \hline \text{sym.} & & \frac{13Ld}{70} k_k^4 D_y + \frac{12L}{5d} k_k^2 D_{xy} & -\frac{11Ld^2}{420} k_k^4 D_y - \frac{L}{5} k_k^2 D_{xy} \\ & & + \frac{6L}{5d} k_k^2 D_1 + \frac{6L}{d^3} D_x & -\frac{3L}{5} k_k^2 D_1 - \frac{3L}{d^2} D_x \\ \hline \left(k_k = \frac{k\pi}{L} \right) & & & \frac{Ld^3}{210} k_k^4 D_y + \frac{4Ld}{15} k_k^2 D_{xy} \\ & & & + \frac{2Ld}{15} k_k^2 D_1 + \frac{2L}{d} D_x \end{bmatrix}$$

(A - 13)

付 録 [B] MATLABソフトウェアによる道路橋解析 プログラム

(1) 作成プログラム

本研究では，特に道路橋交通振動に対しMATLABソフトウェア^{2) 3)}の機能をさらに向上させるために，表B.1のようなプログラムを作成した^{4) 5)}．また，図B.1はMATLABの基本モジュールと拡張ツールボックスの関係を示したものである．

表 B.1 作成したプログラム

時刻歴応答解析	不規則応答解析
路面凹凸の作成 Runge - Kutta法による 時刻歴応答解析	Runge - Kutta法による 不規則応答解析 Pade近似による 不規則応答解析 動吸振器の最適設計

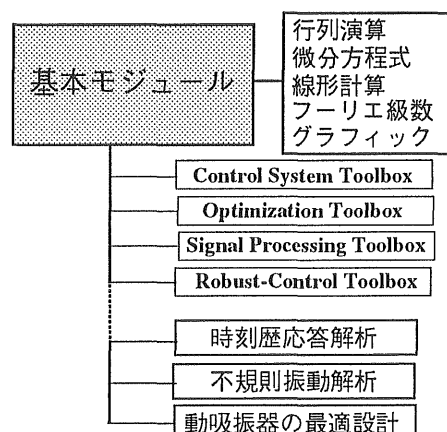


図 B.1 MATLABの基本モジュールと拡張ツールボックス

(2) 時刻歴応答解析

1) 橋梁 - 車両系の方程式

橋梁を1次振動まで考慮し，以下のようなシステムの状態変数と路面凹凸ベクトルを導入する．

$$\mathbf{x}(t) = [q_1(t) \quad \dot{q}_1(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t)]^T \quad (\text{B-1})$$

$$\mathbf{r}(t) = [r(t) \quad \dot{r}(t)]^T \quad (\text{B-2})$$

ここで，各変数は第3章で定義したとおりである．

これらを用いると，橋梁 - 車両系の状態方程式は次のように記述することができる．

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a(t)\mathbf{x}_a(t) + \mathbf{D}_a(t)\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{x}_a(t_0) = \mathbf{x}_{a0} \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

ここで， $\mathbf{A}_a(t)$ は，橋梁 - 車両系の係数マトリックス， $\mathbf{D}_a(t)$ は，外力に係わるマトリックスであり，以下のように構成される．

$$\mathbf{A}_a(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\omega_I^2 - \omega_0^2 \mu_I \phi_I^2(vt), & a_{41} &= \omega_0^2 \phi_I(vt) \\ a_{22} &= -2h_I \omega_I - 2h_0 \omega_0 \mu_I \phi_I^2(vt), & a_{42} &= 2h_0 \omega_0 \phi_I(vt) \\ a_{23} &= \omega_0^2 \mu_I \phi_I(vt), & a_{43} &= -\omega_0^2 \\ a_{24} &= 2h_0 \omega_0 \mu_I \phi_I(vt), & a_{44} &= -2h_0 \omega_0 \\ d_2 &= [-\omega_0^2 \mu \phi_I(vt) \quad -2h_0 \omega_0 \mu \phi_I(vt)], & d_4 &= [\omega_0^2 \quad 2h_0 \omega_0] \end{aligned}$$

ここで，各パラメータは第3章で定義したとおりである．

2) 路面凹凸のモデル化

第4章で示したように，路面凹凸のパワースペクトル密度は，次式で近似できる．

$$S_r(\omega) = \frac{S_0}{\omega^2 + \beta^2} \quad (\text{B-5})$$

ここで， $S_0 = 2\pi v A$ ， $\beta = 2\pi v a$ である．

このパワースペクトル密度より，路面凹凸の変位 $r(t)$ および時間微分 $\dot{r}(t)$ は次のような三角級数モデル⁶⁾により合成できる．

$$r(t) = \sum_{k=1}^m a_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (\text{B-6})$$

$$\dot{r}(t) = \sum_{k=1}^m \omega_k a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (\text{B-7})$$

$$\sigma_k^2 = 4S_r(\omega) \cdot \Delta\omega, \quad \omega_k = \omega_L + (k-1/2)\Delta\omega, \quad \Delta\omega = (\omega_U - \omega_L)/m \quad (\text{B-8})$$

ここで， a_k は平均値 0，標準偏差 σ_k を有する正規乱数， ϕ_k は $0 \sim 2\pi$ の一様乱数， ω_L ， ω_U は合成する波形の凹凸数の下限と上限， m は周波数の分割数である．

3) プログラムの概要

プログラム - 1 およびプログラム - 2 は，路面凹凸を発生させるプログラムと，時刻歴応答解析を行うためのプログラムである．橋梁-車両系の方程式は不規則な外力を入力とする時変系の方程式になる．定常係数系の応答計算を解くプログラムは，*lsim*として準備されているが，時変係数系のプログラムはない．そこで，時変係数系の方程式に対応するため，Runge-Kutta法のファンクションファイルを作成した．プログラム中の，%はコメント行，;はその行の区切りの記号である．functionはファンクションサブプログラムを記述するためのものである．

```

%ROAD ROUGHNESS
T=10.0;dt=0.01; %計算時間に関するパラメータ
v=10; %車両の速度パラメータ
fu=6.0; fl=0; m=50; A=0.0027; a=0.05; n=1; %路面凹凸のパラメータ
[rr,t]=road(T,dt,fu,fl,m,v,A,a,n); %ファンクションファイル(1)とのパラメータ
%の入出力, []:入力, ():出力

figure(1),subplot(211),plot(t,rr(1,:));
figure(2),subplot(212),plot(t,rr(2,:)); %計算結果のプロット
save rr.mat rr %データのセーブ

```

a) メイン ファイル

```

function [rr,t]=road (T,dt,fu,fl,m,v,A,a,n) %パラメータの入出力
wu=2*pi*fu; wl=2*pi*fl; %凹凸数の上限と下限
dw=(wu-wl)/m;
randn('seed',n); ra=randn(1,m); %正規乱数
rand('seed',n+1); rb=rand(1,m); %一様乱数
t=0:dt:T; %時間刻みと計算時間
r=zeros(size(t)); rd=zeros(size(t));
for k=1:m %路面凹凸を求めるループ
w=wl+(k-1/2)*dw; % ( B - 8 ) 式
sgm=sqrt(4*psd(w,v,A,a)*dw); % ファンクションファイル(2)の結果を用い
% ( B - 8 ) 式を計算
ak=sgm*ra(k); fai=2*pi*rb(k);
r=r+ak.*(sin(w*t+fai)); % ( B - 6 ) 式の路面凹凸の変位
rd=rd+w*ak.*(cos(w*t+fai)); % ( B - 7 ) 式の路面凹凸の速度
end
rr=[r;rd]; %路面凹凸ベクトル

```

b) ファンクションファイル (1)

```

function sx=psd(w,v,A,a) %パラメータの入出力
s0=2*pi*v*A; bb=2*pi*v*a;
sx=s0/(w^2+bb^2); %パワースペクトル密度 ( B - 5 ) 式

```

c) ファンクションファイル (2)

プログラム - 1 路面凹凸の作成プログラム

```

%BRIGDE VIBRATION
f0=3.0; w0=2*pi*f0; h0=0.03; %車両のパラメータ
L=40; %橋梁の支間長
t0=0; n=401; d=0.01; %計算時間に関するパラメータ
load rr.mat; %路面凹凸の読み込み
RV1=rr(1:2,1:401);RB1=RV1';
x0=vehicle(w0,h0,RV1); %ファンクションファイル(1)とのパラメータ
%の入出力

RV2=rr(1:2,402:803);RB2=RV2';
[t,Y]=runge(t0,n,d,x0,RB2); %ファンクションファイル(2)とのパラメータ
%の入出力

y=sin(pi*(L/2)/L)*Y(1,:); %橋梁の変位応答
plot(t,y)

```

a) メイン ファイル

```

function x0=vehicle(w0,h0,RV) %パラメータの入出力
t=0:0.01:4;
a=[0 1;-w0^2 -2*h0*w0]; %係数マトリックス
b=[0 0;w0^2 2*h0*w0]; %外力マトリックス
c=[1 0]; %観測マトリックス
d=[0 0]; %外力マトリックス
r=RV'; %伝達マトリックス
[y,x]=lsim(a,b,c,d,r,t); %時不変系システムの応答計算
x0=[zeros(1,2) x(401,:)]; %橋梁 - 車両系の初期条件

```

b) ファンクションファイル (1) (車両の初期条件)

```

%RUNGE-KUTTA METHOD FOR
%VECTOR EQUATION
function [t,Y]=runge(t0,n,d,x0,RB2)
Y(:,1)=x0; %応答の初期値
t(1)=t0;th=t0;
for k=2:n %Runge - Kutta法のループ
    t(k)=th;
    Y(:,k)=x0; %計算結果のため込み
    k1=func(th,x0,RB2,d)*d; % ( B - 1 1 ) 式
    th=th+d/2; kk1=x0+k1/2;
    k2=func(th,kk1,RB2,d)*d; % ( B - 1 2 ) 式
    kk2=x0+k2/2;
    k3=func(th,kk2,RB2,d)*d; % ( B - 1 3 ) 式
    th=th+d/2; kk3=x0+k3;
    k4=func(th,kk3,RB2,d)*d; % ( B - 1 4 ) 式
    x0=x0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6; % ( B - 1 6 ) 式
end

```

c) ファンクションファイル (2) (Runge - Kutta法)

```

function x=func(th,x0,RB2,d) %Runge - Kutta法とのパラメータの入出力
nnn=round(th/d+0.1*d);
DDD=[RB2(nnn+1,:)]'; %路面凹凸ベクトル
%BRIDGE PARAMETER
L=40; EI=24.41*10^8; M=10.68*10^4;
g=9.8; h=0.02; m=M/2;
w=(pi/L).^2*sqrt(EI/(M/L/g));
%VEHICLE PARAMETER
h0=0.03; f0=3.0; w0=2*pi*f0;
m0=20*10^3; v=10;
%MATRIX(A,B)
Rm=m0/m; %橋梁の有効質量に対する車両の質量比
F=sin(pi/L*v*th); %橋梁の振動モード
a1=-w^2-w0^2*Rm*F^2;
a2=-2*h*w-2*h0*w0*Rm*F^2;
a3=w0^2*Rm*F;
a4=2*h0*w0*Rm*F;
a5=w0^2*F; a6=2*h0*w0*F;
a7=-w0^2; a8=-2*h0*w0;
A=[0 1 0 0;a1 a2 a3 a4;
0 0 0 1;a5 a6 a7 a8]; %係数マトリックス
b1=[-Rm*w0^2*F -Rm*2*h0*w0*F];
b2=[w0^2 2*h0*w0];
B=[zeros(1,2);b1;zeros(1,2);b2]; %外力マトリックス
x=A*x0+B*DDD; %状態方程式

```

d) ファンクションファイル (3) (橋梁 - 車両系)

プログラム - 2 時変係数系のためのRunge - Kutta法
による時刻歴応答解析プログラム

4) 時変係数系ための Runge - Kutta法^{7) 8)} による時刻歴応答解析

Runge - Kutta法では，図 B. 4 において (x_0, t_0) 点での傾き $f(x, t)$ より補助増分 k_1 を求めることになるが，ここで Euler法が必要になる．Euler法は，次の Taylor展開式

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{1!} \dot{x}(t) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3!} \ddot{\ddot{x}}(t) + \dots \quad (\text{B}-9)$$

を第2項までを用いるものである．

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) \quad (\text{B}-10)$$

この式は，ある点における傾き \dot{x} に時間変化 h をかけこれを微小時間 h の増分とすることを意味する．

(B-10) 式により図 B. 2 における補助増分 k_1 は， $x(t) = f(x, t)$ と置き替えることで以下のように表現できる．

$$k_1 = f(x_0, t_0)h \quad (\text{B}-11)$$

$h/2$ 時間後である中点 $t_0 + h/2$ における傾きは x 座標の増分が，

(B-11) 式で求めた k_1 の半分の $k_1/2$ となるため， $f(x_0 + k_1/2, t_0 + h/2)$ となる．これより図中の補助増分 k_2 は次式のようにになる．

$$k_2 = f(x_0 + k_1/2, t_0 + h/2)h \quad (\text{B}-12)$$

次に，同時刻 $t_0 + h/2$ において，今求めた増分 k_2 の中点における傾き

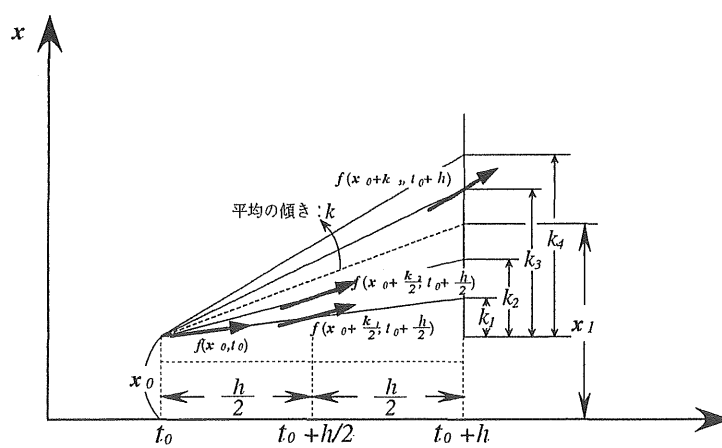


図 B.2 Runge - Kutta法 (4次)

は $f(x_0+k_2/2, t_0+h/2)$ となる．これより補助増分 k_3 は次式のようになる．

$$k_3 = f(x_0+k_2/2, t_0+h/2)h \quad (\text{B-13})$$

さらに，時刻 t_0+h ， x 座標 x_0+k における傾き $f(x_0+k_3, t_0+h)$ より，補助増分 k_4 は次式のようになる．

$$k_4 = f(x_0+k_3, t_0+h)h \quad (\text{B-14})$$

以上 (B-11) 式から (B-14) 式を用いて x_0 に対する増分は，それぞれ重みを考慮した平均値により次式のように近似する．

$$k = \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \quad (\text{B-15})$$

したがって時刻 t_0+h における近似値 $x(t+h)$ は

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + k \\ &= x(t) + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

1 自由度系の場合は，(B-9) から (B-16) 式の状態変数 x_0, t_0 が (2×1) ベクトルになる．

プログラム - 2 は，路面凹凸を外乱とした場合の，橋梁中点の変位応答を求めるためのものである．ただし，橋梁は 1 次振動のみを考慮している．その内容は，メインファイルで (B-3) 式の ω_0, h_0 ，時刻 t_0 ，ポイント数 n ，時間刻み d を入力し，路面凹凸の情報 *rr.mat* をよびだす．これらを引数として初期条件を求めるファンクションファイル (1) に入力し *lsim* 関数により橋梁直前の車両の初期条件 x_0 を求める．Runge-Kutta 法によるファンクションファイル (2) では，車両 - 橋梁系のパラメータおよび方程式を定義したファンクションファイル (3) とのあいだで，(B-16) 式より，橋梁中点の変位応答 $y(x, t)$ を求める．

(3) 不規則応答解析

1) 確率微分方程式

橋梁 - 車両 - 路面系の状態変数ベクトル $X_a(t)$ を,

$$X_a(t) = [q_1(t) \quad \dot{q}_1(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t) \quad r(t)]^T \quad (\text{B-17})$$

と定義すると, 橋梁 - 車両 - 路面系の状態方程式は次のように白色雑音過程を入力とする伊藤型の微分方程式で表すことができる.

$$\begin{cases} \dot{X}_a(t) = A_a(t)X_a(t) + D_a(t)n(t) \\ X_a(t_0) = X_{a0} \end{cases} \quad (\text{B-18})$$

ここで,

$$A_a(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & -\beta \end{bmatrix}, \quad D_a(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-19})$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\omega_1^2 - \omega_0^2 \mu_1 \phi_1^2(vt), & a_{41} &= \omega_0^2 \phi_1(vt), \\ a_{22} &= -2h_1 \omega_1 - 2h_0 \omega_0 \mu_1 \phi_1^2(vt), & a_{42} &= 2h_0 \omega_0 \phi_1(vt) \\ a_{23} &= a_{25} = \omega_0^2 \mu_1 \phi_1(vt), & a_{43} &= a_{45} = -\omega_0^2 \\ a_{24} &= a_{26} = 2h_0 \omega_0 \mu_1 \phi_1(vt), & a_{44} &= -2h_0 \omega_0 \\ d_2 &= -2h_0 \omega_0 \mu_1 \phi_1(vt), & d_4 &= 2h_0 \omega_0 \end{aligned}$$

2) 共分散方程式

橋梁振動の変位応答の分散は, 次式で与えられる.

$$E[y^2(t)] = \phi^2(t) E[q^2(t)] \quad (\text{B-20})$$

これは, 状態マトリクス $X(t)$ の共分散の要素より求められる.

応答 $x(t)$ の平均値回りの変動のみに着目すると, $X(t)$ の共分散は,

$$R_x(t) = E[X(t)X(t)^T] \quad (\text{B-21})$$

と定義できる. したがって, (B-18) 式に対応する共分散方程式は,

以下のように記述できる.

$$\begin{cases} \dot{R}_x(t) = A_r(t)R_x(t) + R_x(t)A_r(t)^T + D_r(t)D_r(t)^T \sigma^2 \\ R_x(t_0) = R_{x0} \end{cases} \quad (\text{B-22})$$

また, 初期条件は, 車両は無限遠点から発進し, 定常状態に達し

た後に車両は橋梁に進入するものとする。車両が橋梁の $x=l$ 点に位置し、定常な接地力を加えるものとする。定常応答解析の問題になる。この場合 (B-22) 式は次の代数方程式になる。

$$A_r(t)R_x(t)+R_x(t)A_r(t)^T+D_r(t)D_r(t)^T\sigma^2=0 \quad (\text{B}-23)$$

3) プログラムの概要

① Runge - Kutta法

Runge - Kutta法による不規則応答解析のプログラムを、プログラム - 3 に示す。

```
t0=0; n=401; d=0.01;
R0=vehicle; % ファンクションファイル(1)とのパラメータの入出力
[t,XR]=runge(t0,n,d,R0);
plot(t,sqrt(XR(:,1)))
```

a) メインファイル

```
function R0=vehicle
%MATRIX(A0,B0,Q0)
A=[0 1 0; -w0^2 -2*h0*w0 -(2*h0*w0*bv-w0^2);
  0 0 -bv]; % 共分散方程式の係数マトリックス
B=[0; 2*h0*w0; 1];
Q=B*(sgm^2)*B';
%INITIAL CONDITION
R0=lyap(A,Q); % Lyapunov方程式
R0=[zeros(1,5); zeros(1,5); zeros(3,2) R0]; % 共分散方程式の初期値
```

b) ファンクションファイル (1) (共分散方程式の初期条件)

```
%RUNGE-KUTTA METHOD FOR
%COVARIANCE EQUATION
function [t,XR]=runge(t0,n,d,R0);
```

b) ファンクションファイル (2) (Runge - Kutta法)

```
function PP=func(th,P)
%MATRIX(A,B,Q)
A=[0 1 0 0 0; a1 a2 a3 a4 a5; 0 0 0 1 0;
  a6 a7 a8 a9 a10; 0 0 0 0 -bv]; % 共分散方程式の係数マトリックス
B=[0 b1 0 b2 1]';
sgm=sqrt(2*pi*s0); % 平方根
Q=B*(sgm^2)*B';
PP=A*P+P*A'+Q; % 共分散方程式
```

b) ファンクションファイル (3) (共分散方程式)

プログラム - 3 時変係数系のためのRunge - Kutta法による
不規則応答解析プログラム

② Pade近似⁹⁾

共分散方程式 (B-22) 式は差分表示した場合, 第3章で示した2次のPade近似式 $e^{A_k h}$ を用いて,

$$R_k = e^{A_k h} R_{k-1} e^{A_k^T h} + \frac{I}{2} \left[D_{rk} D_{rk}^T + e^{A_k h} D_{rk-1} D_{rk-1}^T e^{A_k^T h} \right] \sigma^2 h \quad (\text{B-24})$$

$$e^{A_k h} = (I - Ah/2)^{-1} (I + Ah/2) \quad (\text{B-25})$$

と表せる.

Pade近似による不規則応答解析のプログラムを, プログラム-4に示す.

```
%PADE METHOD FOR
%COVARIANCE EQUATION
function [t,XR]=pade(t0,n,d,R0)
b=R0(:);XR(1,:)=b';
t(1)=t0;th=t0;
for k=2:n
    [A,Q]=func(th);
    A1=inv(eye(size(A))-0.5*A*d);
    B1=eye(size(A))+0.5*A*d;
    C=B1*A1;
    R0=C*R0*C'+A1*Q*A1'*d; %共分散方程式
    th=th+d;
    b=R0(:);XR(k,:)=b';
    t(k)=th;
end
```

a) ファンクションファイル (1) (Pade近似)

```
function [A,Q]=func(th,P)
A=[0 1 0 0 0;a1 a2 a3 a4 a5;0 0 0 1 0;
   a6 a7 a8 a9 a10;0 0 0 0 -bv];
B=[0 b1 0 b2 1]';
sgm=sqrt(2*pi*s0);
Q=B*(sgm^2)*B';
```

b) ファンクションファイル (2)

プログラム - 4 時変係数系のためのPade近似による不規則応答解析プログラム

参考文献

- 1) 草間晴幸・谷山健：有限帯板法，日刊工業新聞社，1994.4.
- 2) 小国力：MATLABと利用の実際，サイエンス社，1995.4.
- 3) 阿部寛：やさしいMacの数値数式処理プログラム，（株）毎日コミュニケーションズ，1990.8.
- 4) 岡林隆敏・加賀敏明・甲斐利彦：MATLAB言語による道路橋交通振動の解析，長崎大学工学部研究報告，Vol.26, No.46, pp.279-286, 1996.1.
- 5) 岡林隆敏・馬渡あかね・加賀敏明：MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の歩行者励起振動の解析と制御設計，構造工学論文集，Vol.43A, pp.693-702, 1997.3.
- 6) 星谷勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974.8.
- 7) 日本機械学会：CAIシリーズ 機械システムのダイナミックス入門，日本機械学会，1990.2.
- 8) 芳村敏夫・横山隆・日野順市：基礎 振動工学，共立出版，1992.10.
- 9) D.M Trujillo: The Direct Numerical Intergration of Linear Matrix Differential Equations Using Pade Approximations, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.9, pp259-270, 1975.

謝 辞

本研究の遂行と論文の作成にあたり，長崎大学工学部社会開発工学科の高橋和雄教授ならびに岡林隆敏助教授には，御多忙ななか，貴重な御指導，御助言を頂きました．本論文がこのようなかたちで完成したのは正に両先生のお陰であります．ここに深甚なる感謝の意を表します．

本論文をまとめるにあたり，適切な御助言と有益な御指摘を賜り御指導いただきました長崎大学工学部構造工学科の末岡禎佑教授，崎山毅教授ならびに吉武裕教授に深く感謝の意を表します．

私に振動や制御に関する興味を与えて下さり，公私ともお世話になり，常に暖かい御助言をして頂いた長崎大学環境科学部の中村任男教授には言葉に表せない感謝の気持ちでいっぱいです．

高橋和雄教授，岡林隆敏助教授のもとで研究を進める機会を与えていただいた長崎総合科学大学機械工学科の高允宝教授ならびに深松尚助教授に感謝する次第であります．

馬渡あかねさん，山森和博君，林英次郎君，高木真一郎君，串山智恵美さん，田村太一郎君をはじめ土木構造学研究室の各位には多大なる御協力を頂きました．ここに厚く感謝の意を表します．

本研究室の卒業生である小松正貴君，吉村徹君，尾口慎也君とは共に研究に励んだ仲であります．良きアドバイスを頂いたことに深く感謝します．

社会開発工学科の永田正美技官，樋口由紀子さんには，常に暖かいお言葉を頂き，様々な事務手続きをして頂きました．ここに感謝いたします．

さらに，本論文は，公開論文発表会に御参加いただいた50名にも及ぶ多数のみなさまの御意見により，その内容を充実させることができました．発表会のために御足労いただいた方々に感謝いたします．

本論文は，以上の皆様の御協力により完結いたしました．心より感謝申し上げます．

最後に，大学，大学院修士課程さらに大学院博士課程へと9年にも及ぶ学生生活を送ることができたのは，正に父，加賀良美，母，キミの支えによるものであります．この場をかりて心よりお礼申し上げます．

加賀敏明